The Monty Hall Paradox

إعداد المدرّسة

نـدى عدنان علي

- المسألة وتاريخها
- حل مسألة مونتي هول في حالة ثلاثة أبواب وفي حالة n باب
- قانون الاحتمال الكلي وصيغة بايز
- حل المسألة اعتماداً على صيغة بايز
- استراتيجيات أخرى للمسألة
- Monty Hall Simulation By Python

المسألة وتاريخها

مسألة مونتي هول: هي لغز احتمالات ظهرت في البرنامج التلفزيوني الأمريكي للألعاب Let's Make a Deal الذي ظهر في الفترة بين الستينات والسبعينات من القرن الماضي ، أتى اسم هذه المسألة من اسم المضيف مونتي هول .

هذه المسألة تسمى أيضًا **مفارقة مونتي هول** (Monty Hall paradox) فبما أنها مفارقة فإن طريقة حلها غير قابلة للتوقُّع.

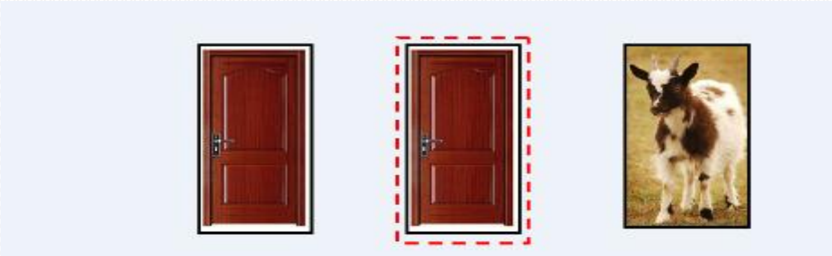
في أيلول عام ١٩٩١ قامت الصحفيّة Marlin Savant من صحيفة Sandy Parad بطرح السؤال التالي:

" افترض أنك في برنامج ألعاب و خيرت بين ثلاث أبواب خلف أحدها سيارة وخلف البقية ماعز ، تقوم بانتقاء باب وثم يقوم المضيف (الذي يعرف مسبقاً مكان السيارة وبالتأكيد لا يفتح الباب الذي خلفه السيارة) بفتح باب آخر ، ثم يعطيك الخيار لتبدل الباب الذي اخترته ، فهل يجب عليك التبديل أم أنه من الأفضل أن تبقى على اختيارك؟ "

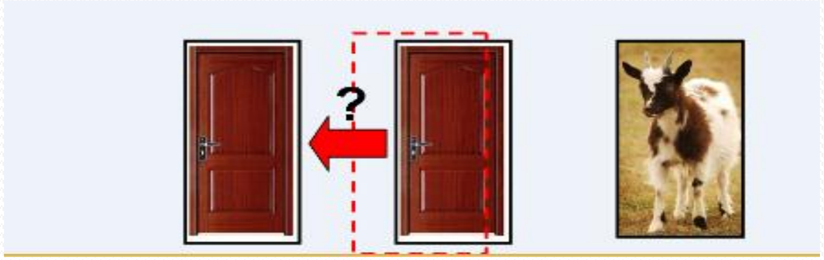
مثلاً :

إذا قمت باختيار الباب الثاني:

ويفتح المضيف لك الباب الثالث:



ثم يعطيك الخيار بالتبديل أو البقاء على اختيارك :



ما الذي يجب أن تفعله لتزيد فرص ربحك للسيارة؟

حل مسألة مونتي هول في حالة ثلاثة أبواب وفي حالة n باب:

حالة ثلاثة أبواب

الفوز بعدم التبديل	الفوز بالتبديل	يفتح المضيف	موقع السيارة	اختيار اللاعب
✓	✗	2 أو 3	1	1
✗	✓	3	2	1
✗	✓	2	3	1
✗	✓	3	1	2
✓	✗	1 أو 3	2	2
✗	✓	1	3	2
✗	✓	2	1	3
✗	✓	1	2	3
✓	✗	1 أو 2	3	3

احتمال الفوز بالتبديل = $\frac{2}{3}$ ، احتمال الفوز بعدم التبديل = $\frac{1}{3}$

حالة n باب

إذا كان لدينا n باب تصبح المسألة بالشكل التالي:

" افترض أنك في برنامج ألعاب و خيرت بين nباب خلف أحدها سيارة وخلف البقية ماعز ، تقوم بانتقاء باب وثم يقوم المضيف (الذي يعرف مسبقاً مكان السيارة وبالتأكيد لا يفتح الباب الذي خلفه السيارة) بفتح بقية الأبواب ماعدا باب واحد ، ثم يعطيك الخيار لتبدل الباب الذي اخترته ، فهل يجب عليك التبديل أم أنه من الأفضل أن تبقى على اختيارك؟ "

الفوز بعدم التبديل	الفوز بالتبديل	يفتح المضيف	موقع السيارة	اختيار اللاعب
✓	✗	2,3….n	1	1
✗	✓	3,4,….n	2	1
✗	✓	2,4,….n	3	1
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
✗	✓	2,3….n-1	n	1

احتمال الفوز بالتبديل $= \frac{n-1}{n}$ ، احتمال الفوز بعدم التبديل $= \frac{1}{n}$

قانون الاحتمال الكلي وصيغة بايز

تعاريف هامة :

- فضاء العينة .
- الحدث الابتدائي ، الحدث ، الحدث الأكيد ، الحدث المستحيل .
- احتمال حدث A يعطى بالقانون : $P(A)=\dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}$
- الاحتمال الشرطي:

إذا كان A,B حدثان متعلقان بتجربة ما فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يعطى بالشكل : $P(A\,|\,\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(B)}$

✓ نستنتج من هذا القانون $P(A\,|\,\mathrm{B})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(B)}\Rightarrow P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(A\,|\,\mathrm{B}).\mathrm{P}(B)$

قانون الاحتمال الكلي:

لتكن لدينا الأحداث $A_1, A_2, ...A_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة وليكن لدينا حدث B يمثل اجتماع مجموعه من الأحداث المتنافية مثنى عندئذ فإن:

$$P(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).\mathrm{P}(A_i)$$

وهو قانون الاحتمال الكلي.

نظرية بايز "بييز":

لتكن لدينا الأحداث $A_1, A_2, ...A_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة وليكن لدينا حدث B مرتبط بهذه التجربة فإن احتمال وقوع الحدث A_i بشرط وقوع الحدث B يعطى بالعلاقة التالية :

$$P(A_i \mid \mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(B)} = \frac{P(B \mid A_i).\mathrm{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).\mathrm{P}(A_i)}$$

حل المسألة اعتماداً على صيغة بايز

حالة ثلاثة أبواب

- نرمز بـ C_k للدلالة على أن السيارة خلف الباب k ، فيكون $P(C_k)=\frac{1}{3}$
- نرمز بـ$H_{i,j}$ للدلالة على أن المضيف يفتح الباب j بعد أن يختار اللاعب الباب i .
- لنحسب الآن احتمال $H_{i,j}$ بشرط أن C_k قد وقع:

$$P\left(H_{i,j} \mid C_k\right)=\begin{cases} 1/2 & i=k \\ 0 & i=j \\ 0 & j=k \\ 1 & i\neq j\neq k \end{cases}$$

- نحسب الآن احتمال الحدث الكلي $H_{i,j}$:

$$P(H_{i,j})=\sum_{k=1}^{3}P(H_{i,j} \mid \mathrm{C}_k).\mathrm{P}(\mathrm{C}_k)=$$
$$=P(H_{i,j} \mid \mathrm{C}_i).\mathrm{P}(\mathrm{C}_i)+P(H_{i,j} \mid \mathrm{C}_j).\mathrm{P}(\mathrm{C}_j)+P(H_{i,j} \mid \mathrm{C}_k).\mathrm{P}(\mathrm{C}_k)$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+0.\frac{1}{3}+1.\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

- باستخدام صيغة بايز نحسب احتمال C_k بشرط وقوع الحدث الكلي $H_{i,j}$:

$$P(C_k \mid H_{i,j}) = \frac{P(C_k \cap H_{i,j})}{P(H_{i,j})} = \frac{P(H_{i,j} \mid C_k).P(C_k)}{P(H_{i,j})}$$

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الأول C_1 بشرط $H_{1,3}$:

$$P(C_1 \mid H_{1,3}) = \frac{P(H_{1,3} \mid C_1).P(C_1)}{P(H_{1,3})} = \frac{1/2.1/3}{1/2} = \frac{1}{3}$$

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الثاني C_2 بشرط $H_{1,3}$:

$$P(C_2 \mid H_{1,3}) = \frac{P(H_{1,3} \mid C_2).P(C_2)}{P(H_{1,3})} = \frac{1.1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الثالث C_3 بشرط $H_{1,3}$:

$$P(C_3 \mid H_{1,3}) = \frac{P(H_{1,3} \mid C_3).P(C_3)}{P(H_{1,3})} = \frac{0.1/3}{1/2} = 0$$

حالة n باب

- نرمز بـ C_k للدلالة أن السيارة خلف الباب k ، فيكون $P(C_k)=\frac{1}{n}$
- نرمز بـ $H_{i,jl.....m}$ للدلالة أن المضيف يفتح الأبواب $jl......m$ بعد أن يختار اللاعب الباب i .
- لنحسب الآن احتمال $H_{i,jl.....m}$ بشرط أن C_k قد وقع:

$$P\left(H_{i,jl.....m} \mid C_k\right)=\begin{cases}\frac{1}{\mathrm{c(n-1,n-2)}}=\frac{1}{n-1} & i=k\\ 0 & i=j,l,....m\\ 0 & j,l,....m=k\\ 1 & i\neq j,l,....m\neq k\end{cases}$$

- نحسب الآن احتمال الحدث الكلي $H_{i,jl.....m}$:

$$P(H_{i,jl.....m})=\sum_{k=1}^{n} P(H_{i,jl.....m} \mid \mathrm{C}_k)\ .\ \mathrm{P}(\mathrm{C}_k)=$$

$$=\frac{1}{n-1}.\frac{1}{n}+1.\frac{1}{n}+0.\frac{1}{n}+...........+0.\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$$

- باستخدام صيغة بايز نحسب احتمال C_k بشرط وقوع الحدث الكلي $H_{i,jl.....m}$:

$$P(C_k \mid H_{i,jl.....m}) = \frac{P(C_k \cap H_{i,jl.....m})}{P(H_{i,jl.....m})} = \frac{P(H_{i,jl.....m} \mid C_k).P(C_k)}{P(H_{i,jl.....m})}$$

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الأول C_1 بشرط $H_{1,3......n}$:

$$P(C_1 \mid H_{1,3......n}) = \frac{P(H_{1,3.....n} \mid C_1)\ .\ P(C_1)}{P(H_{1,3.....n})} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n}$$

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الثاني C_2 بشرط $H_{1,3......n}$:

$$P(C_2 \mid H_{1,3.....n}) = \frac{P(H_{1,3......n} \mid C_2)\ .\ P(C_2)}{P(H_{1,3.....n})} = \frac{1\ .\ 1/n}{1/n-1} = \frac{n-1}{n}$$

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الثالث C_3 بشرط $H_{1,3......n}$:

$$P(C_3 \mid H_{1,3.....n}) = \frac{P(H_{1,3......n} \mid C_3).P(C_3)}{P(H_{1,3.....n})} = \frac{0.1/n}{1/n-1} = 0$$

بالمتابعة نجد.......

✓ احتمال أن تكون السيارة خلف الباب الثالث C_n بشرط $H_{1,3......n}$:

$$P(C_n \mid H_{1,3.....n}) = 0$$

استراتيجيات أخرى للمسألة:

- ماذا لو أن المضيف لا يعلم مكان السيارة ؟

" افترض أنك في برنامج ألعاب و خيرت بين ثلاث أبواب خلف أحدها سيارة وخلف البقية ماعز ، تقوم بانتقاء باب وثم يقوم المضيف (الذي لا يعرف مكان السيارة) بفتح باب آخر ، فإذا ظهرت السيارة تخسر و إذا ظهرت الماعز يعطيك الخيار لتبدل الباب الذي اخترته ، فهل يجب عليك التبديل أم أنه من الأفضل أن تبقى على اختيارك؟ "

الفوز بعدم التبديل	الفوز بالتبديل	يفتح المضيف	موقع السيارة	اختيار اللاعب
✓	✗	٢	١	١
✓	✗	٣	١	١
✗	✗	٢	٢	١
✗	✓	٣	٢	١
✗	✓	٢	٣	١
✗	✗	٣	٣	١

ماذا لو استخدم المضيف قطعة نقد؟

" افترض أنك في برنامج ألعاب و خيرت بين ثلاث أبواب خلف أحدها سيارة وخلف البقية ماعز ، تقوم بانتقاء باب وثم يقوم المضيف (الذي يعرف مكان السيارة) بفتح باب آخر ثم يرمي قطعة نقد فإذا ظهر الوجه H يعطيك فرصة لتبديل اختيارك، فإذا ظهر الوجه T لا يعطيك فرصة لتبديل اختيارك، فهل يجب عليك التبديل أم أنه من الأفضل أن تبقى على اختيارك؟ "

الفوز بعدم التبديل	الفوز بالتبديل	قطعة النقد	يفتح المضيف	موقع السيارة	اختيار اللاعب
✓	✗	H	٢أو ٣	١	١
✓	✗	T	٢أو ٣	١	١
✗	✓	H	٣	٢	١
✗	✗	T	٣	٢	١
✗	✓	H	٢	٣	١
✗	✗	T	٢	٣	١

MontyHall Simulation By Python