

Table des matières

CHAPITRE 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

1.1	Remarques à propos des nombres réels	1
1.1.1	Sous-ensembles de nombres réels	1
1.1.2	Distance, voisinage	2
1.1.3	Nombres rationnels et nombres réels	3
1.2	Limite d'une suite numérique	5
1.2.1	Notion de limite	5
1.2.2	Critère de Cauchy	5
1.2.3	Généralisation : \limsup , \liminf	6
1.3	Limite d'une fonction	6
1.3.1	Limite quand x tend vers l'infini	6
1.3.2	Limite quand x tend vers x_0	7
1.4	Fonctions continues	7
1.4.1	Fonctions continues dans un ensemble fermé	8
1.5	Calcul de limites; séries	8
1.5.1	Limites de suites numériques	8
1.5.2	Limite d'une fonction	9
1.5.3	Notion de série numérique	10

CHAPITRE 2 NOMBRES COMPLEXES

2.1	Opérations élémentaires sur les nombres complexes	11
2.1.1	Représentation graphique	11
2.1.2	Forme trigonométrique des nombres complexes (forme polaire)	12
2.1.3	Comment calculer avec les nombres complexes? ..	12
2.1.4	Addition et soustraction des nombres complexes ..	12

2.1.5	Multiplication des nombres complexes.....	12
2.1.6	Division des nombres complexes.....	13
2.1.7	Nombres complexes conjugués.....	14
2.1.8	Règles de calcul pour les nombres conjugués.....	14
2.1.9	Puissances $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes.....	15
2.1.10	Racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes.....	15
2.2	Formules d'Euler et de de Moivre, fonctions exponentielle et logarithme.....	16
2.2.1	Formules d'Euler.....	16
2.2.2	Les trois représentations des nombres complexes..	17
2.2.3	Formule de de Moivre.....	17
2.2.4	Fonction exponentielle.....	17
2.2.5	Logarithme.....	17
2.3	Fonctions hyperboliques.....	18
2.3.1	Graphes des fonctions hyperboliques.....	18
2.3.2	Quelques identités.....	19
2.3.3	Relations entre fonctions hyperboliques et trigonométriques.....	19
2.4	Fonctions rationnelles.....	19
2.4.1	Décomposition de polynôme en facteurs irréductibles.....	19
2.4.2	Partie entière d'une fonction rationnelle.....	20
2.4.3	Décomposition d'une fraction proprement dite....	20
2.5	Oscillations harmoniques.....	24
2.5.1	Méthode complexe (idée générale).....	24
2.5.2	Représentation complexe des oscillations harmoniques.....	24
2.5.3	Addition (superposition) d'oscillations harmoniques de même fréquence.....	25

CHAPITRE 3 CALCUL DIFFÉRENTIEL DE FONCTIONS
D'UNE VARIABLE

3.1	Dérivées	29
3.1.1	Fonctions dérivables et fonctions continues	30
3.1.2	Généralisations : dérivée à gauche, dérivée à droite	30
3.1.3	Théorème des accroissements finis (théorème de la moyenne)	30
3.1.4	Théorème de Rolle (cas particulier du théorème des accroissements finis)	31
3.1.5	Généralisation du théorème des accroissements finis	32
3.1.6	Fonctions dont la dérivée s'annule	32
3.1.7	Dérivées de quelques fonctions élémentaires	33
3.2	Méthodes de calcul de dérivées, dérivées d'ordre supérieur	33
3.2.1	Règles de dérivation	33
3.2.2	Liste de dérivées	34
3.2.3	Dérivées d'ordre supérieur	34
3.2.4	Dérivées de « fonctions vectorielles »	35
3.2.5	Fonctions complexes d'une variable réelle	35
3.3	Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques inverses	36
3.3.1	Fonctions trigonométriques inverses	36
3.3.2	Fonctions hyperboliques inverses	39
3.4	Etude de fonctions	40
3.5	Courbes paramétrées	44
3.5.1	Courbes paramétrées, vecteur tangent, vecteur normal	44

3.6	Maxima et minima	48
3.6.1	Valeurs stationnaires	49
3.6.2	Extrema locaux (ou extrema relatifs)	49
3.6.3	Extrema absolus	50
3.7	Approximation linéaire; différentielles	51
3.7.1	Approximation (locale) linéaire d'une fonction ...	51
3.7.2	Différentielles	53
3.8	Précision de l'approximation linéaire	55
3.8.1	Que vaut l'approximation linéaire?	55
3.8.2	Précision en un point	55
3.8.3	Précision dans un intervalle	56

CHAPITRE 4 INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE

4.1	Intégrale définie	57
4.1.1	Calcul approché de certaines aires	57
4.1.2	Intégrale de Riemann	60
4.1.3	Intégrales et aires	62
3.4.4	Intégrale et travail	63
4.2	Propriétés de l'intégrale définie	63
4.2.1	Quelques propriétés élémentaires	63
4.2.2	Théorème de la moyenne	65
4.2.3	Changement du symbole de la variable d'intégration	66
4.3	Intégrale indéfinie (primitive)	66
4.3.1	Primitive	66
4.3.2	Recherche de primitives	67
4.4	Intégration de fonctions rationnelles	69
4.4.1	Fonctions rationnelles	69
4.4.2	Fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques	72

4.5	Théorème fondamental du calcul infinitésimal.....	72
4.5.2	Méthode d'intégration	74
4.5.3	Dérivées d'intégrales dépendant de leurs limites ..	75
4.6	Intégrales généralisées (appelées aussi intégrales impropres).....	75
4.6.1	Intégrales avec des bornes infinies (intégrales impropres de seconde espèce)	75
4.6.2	Intégrales de certaines fonctions discontinues (intégrales impropres de première espèce)	78
4.7	Applications des intégrales	80
4.7.1	Aire sous une courbe paramétrée.....	80
4.7.2	Aire délimitée par une courbe fermée.....	81
4.7.3	Aire en coordonnées polaires.....	81
4.7.4	Longueur d'un arc de courbe (plane).....	82
4.7.5	Longueur d'un arc paramétré	82
4.7.6	Abscisse curviligne comme paramètre	83
4.7.7	Abscisse curviligne et vecteur tangent.....	83
4.7.8	Volume.....	84
4.7.9	Volume d'un corps de révolution	84
4.7.10	Aire d'une surface de révolution.....	84
4.8	Courbure, cercle osculateur.....	85
4.8.1	Calcul de la courbure.....	85
4.8.2	Rayon de courbure, cercle osculateur et centre de courbure.....	86

CHAPITRE 5 SÉRIES

5.1	Séries numériques, séries alternées.....	87
5.1.1	Séries numériques.....	87
5.1.2	Séries alternées	88

5.1.3	Convergence absolue.....	89
5.1.4	Séries complexes.....	90
5.2	Séries à termes positifs, critères de convergence.....	90
5.2.1	Tests de d'Alembert et de Cauchy (test du quotient et test de la racine $n^{\text{ième}}$).....	91
5.2.2	Cas particulier des tests de d'Alembert et de Cauchy.....	92
5.2.3	Comparaison avec une intégrale.....	92
5.3	Suite de fonctions, séries de fonctions, convergences simple et uniforme.....	93
5.3.1	Suites de fonctions réelles.....	93
5.3.2	Séries de fonctions réelles.....	95

CHAPITRE 6 SÉRIES DE TAYLOR

6.1	Approximations locales par des polynômes.....	97
6.2	Formule de Taylor.....	99
6.2.1	Précision de l'approximation linéaire.....	99
6.2.2	Une autre définition de la dérivée.....	100
6.2.3	Précision de l'approximation d'ordre n	101
6.3	Séries de Taylor.....	102
6.3.1	La notion de série de Taylor.....	102
6.3.2	Exemples de fonctions entières.....	103
6.4	Domaine de convergence.....	104
6.4.1	Convergence des séries entières.....	104
6.4.2	Calcul du rayon de convergence.....	106
6.4.3	Convergence et singularités.....	106
6.5	Opérations élémentaires sur les séries entières.....	107
6.6	Intégration et dérivation des séries entières.....	110

CHAPITRE 7 CALCUL DIFFÉRENTIEL DE FONCTIONS
DE PLUSIEURS VARIABLES

7.1 Fonctions différentiables, dérivées partielles.....	111
7.1.1 Fonctions différentiables	111
7.1.2 Dérivées partielles	112
7.1.3 Fonctions différentiables et dérivées partielles ...	114
7.1.4 Différentielles totales	115
7.1.5 Application : propagation d'erreurs de mesure ...	115
7.1.6 Commutativité des dérivées partielles	116
7.2 Dérivées de fonctions composées.....	116
7.2.1 Dérivée totale (ou dérivée le long d'une courbe) .	116
7.2.2 Dérivées partielles de fonctions composées.....	117
7.2.3 Dérivées de fonctions implicites	118
7.3 Dérivée directionnelle, gradient.....	119
7.3.1 Dérivée suivant une direction donnée (dérivée directionnelle).....	119
7.3.2 Notion de « champ ».....	120
7.3.3 Gradient	120
7.4 Développement de Taylor	121
7.5 Maxima et minima	122
7.5.1 Trois problèmes à distinguer	122
7.5.2 Résolution des trois problèmes	124
7.6 Extrema liés (multiplicateurs de Lagrange).....	125
7.6.1 Valeurs stationnaires avec contraintes	125
7.6.2 Généralisations	126

CHAPITRE 8 INTÉGRALES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

8.1	Intégrales doubles	127
8.1.1	Calcul de certains volumes	127
8.1.2	Intégrales doubles en général	131
8.2	Changement de variables dans une intégrale double	132
8.2.1	Jacobien	132
8.2.2	Intégrales doubles en coordonnées curvilignes	133
8.3	Intégrales triples	133
8.3.1	Coordonnées cartésiennes	133
8.3.2	Coordonnées curvilignes	134
8.3.3	Applications	135
8.3.4	Formule de Steiner-Huygens	136
8.4	Intégrales dépendant d'un paramètre	137
8.4.1	Limites d'intégration constantes	137
8.4.2	Limites d'intégration variables	137

CHAPITRE 9 CHAMPS VECTORIELS PLANS ET POTENTIELS

9.1	Intégrales curvilignes planes	139
9.1.1	Définition des intégrales curvilignes	139
9.1.2	Calcul des intégrales curvilignes en coordonnées cartésiennes	140
9.1.3	Existence de l'intégrale curviligne	141
9.1.4	Exemples d'intégrales curvilignes	141
9.1.5	Indépendance de la paramétrisation	142
9.1.6	Règles de calcul	142
9.1.7	Formule de Riemann-Green	143
9.2	Gradient et potentiel	144
9.2.2	Recherche du potentiel	145

9.3	Différentielles totales.....	146
9.3.1	Formes différentielles.....	146
9.3.2	Intégration des formes différentielles.....	146
9.3.3	Analogies entre champs vectoriels et formes différentielles.....	147
CHAPITRE 10 EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 1		
10.1	Croissance exponentielle.....	149
10.2	Equations à variables séparées, changement de variables, équations homogènes.....	150
10.2.1	Equations à variables séparées.....	150
10.2.2	Changement de variables.....	151
10.2.3	Equations homogènes.....	152
10.3	Equation aux différentielles totales, facteur intégrant...	153
10.3.1	Equation différentielle des lignes de niveau.....	153
10.3.2	Intégration des équations aux différentielles totales.....	153
10.3.3	Facteur intégrant.....	154
10.4	Familles de courbes, enveloppes, équation de Clairaut..	154
10.4.1	Famille de courbes.....	154
10.4.2	Enveloppes d'une famille de courbes.....	155
10.4.3	Equation de Clairaut.....	155
10.5	Existence et unicité.....	156
10.5.1	Théorème d'existence et d'unicité.....	156
10.5.2	Approximation successive.....	157
CHAPITRE 11 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS		
11.1	L'équation $y' + ay = f(x)$	159
11.1.1	L'équation homogène $y' + ay = 0$	159

11.1.2	L'équation non homogène $y' + ay = f(x)$	160
11.1.3	Recherche d'une solution particulière.....	160
11.2	L'équation $y'' + ay' + by = 0$	161
11.2.1	Structure de l'ensemble des solutions.....	161
11.2.2	Recherche de deux solutions linéairement indépendantes.....	161
11.3	L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$	162
11.3.1	La solution générale.....	162
11.3.2	Recherche d'une solution particulière.....	163
11.4	Seconds membres particuliers.....	164
11.4.1	Oscillations forcées.....	164
11.5	L'équation $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$	166
11.5.1	Recherche de n solutions linéairement indépendantes.....	166
11.5.2	Problème aux valeurs initiales.....	167
11.5.3	Wronskien.....	168
11.6	L'équation $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x)$	169
11.6.1	Solution générale.....	169
11.6.2	Recherche d'une solution particulière.....	169

CHAPITRE 12 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS VARIABLES

12.1	Ensemble des solutions d'une équation linéaire.....	173
12.1.1	Equation homogène.....	173
12.1.2	Equation non homogène.....	174
12.2	Equation d'Euler.....	175
12.3	L'équation $y' + a(x)y = f(x)$	176
12.3.1	L'équation homogène $y' + a(x)y = 0$	176
12.3.2	L'équation non homogène $y' + a(x)y = f(x)$	176
12.4	Equations à coefficients analytiques.....	176

CHAPITRE 13 MÉTHODES PARTICULIÈRES, EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES	
13.1 Abaissement de l'ordre	179
13.2 Exemples d'équations non linéaires	180
13.2.1 Equation de Bernoulli	180
13.2.2 Equation de Riccati	180