

Table des matières

CHAPITRE 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

1.1	Remarques à propos des nombres réels.....	1
1.1.1	Sous-ensembles de nombres réels	1
1.1.2	Distance, voisinage.....	2
1.1.3	Nombres rationnels et nombres réels.....	3
1.2	Limite d'une suite numérique.....	5
1.2.1	Notion de limite	5
1.2.2	Critère de Cauchy	5
1.2.3	Généralisation : \limsup , \liminf	6
1.3	Limite d'une fonction.....	6
1.3.1	Limite quand x tend vers l'infini	6
1.3.2	Limite quand x tend vers x_0	7
1.4	Fonctions continues.....	7
1.4.1	Fonctions continues dans un ensemble fermé.....	8
1.5	Calcul de limites; séries	8
1.5.1	Limites de suites numériques.....	8
1.5.2	Limite d'une fonction	9
1.5.3	Notion de série numérique	10

CHAPITRE 2 NOMBRES COMPLEXES

2.1	Opérations élémentaires sur les nombres complexes.....	11
2.1.1	Représentation graphique.....	11
2.1.2	Forme trigonométrique des nombres complexes (forme polaire)	12
2.1.3	Comment calculer avec les nombres complexes?..	12
2.1.4	Addition et soustraction des nombres complexes..	12

2.1.5	Multiplication des nombres complexes.....	12
2.1.6	Division des nombres complexes.....	13
2.1.7	Nombres complexes conjugués.....	14
2.1.8	Règles de calcul pour les nombres conjugués.....	14
2.1.9	Puissances $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes.....	15
2.1.10	Racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes.....	15
2.2	Formules d'Euler et de de Moivre, fonctions exponentielle et logarithme.....	16
2.2.1	Formules d'Euler.....	16
2.2.2	Les trois représentations des nombres complexes..	17
2.2.3	Formule de de Moivre.....	17
2.2.4	Fonction exponentielle.....	17
2.2.5	Logarithme.....	17
2.3	Fonctions hyperboliques.....	18
2.3.1	Graphes des fonctions hyperboliques.....	18
2.3.2	Quelques identités.....	19
2.3.3	Relations entre fonctions hyperboliques et trigonométriques.....	19
2.4	Fonctions rationnelles.....	19
2.4.1	Décomposition de polynôme en facteurs irréductibles.....	19
2.4.2	Partie entière d'une fonction rationnelle.....	20
2.4.3	Décomposition d'une fraction proprement dite....	20
2.5	Oscillations harmoniques.....	24
2.5.1	Méthode complexe (idée générale).....	24
2.5.2	Représentation complexe des oscillations harmoniques.....	24
2.5.3	Addition (superposition) d'oscillations harmoniques de même fréquence.....	25

CHAPITRE 3 CALCUL DIFFÉRENTIEL DE FONCTIONS
D'UNE VARIABLE

3.1	Dérivées	29
3.1.1	Fonctions dérivables et fonctions continues	30
3.1.2	Généralisations : dérivée à gauche, dérivée à droite.....	30
3.1.3	Théorème des accroissements finis (théorème de la moyenne).....	30
3.1.4	Théorème de Rolle (cas particulier du théorème des accroissements finis).....	31
3.1.5	Généralisation du théorème des accroissements finis.....	32
3.1.6	Fonctions dont la dérivée s'annule.....	32
3.1.7	Dérivées de quelques fonctions élémentaires	33
3.2	Méthodes de calcul de dérivées, dérivées d'ordre supérieur.....	33
3.2.1	Règles de dérivation	33
3.2.2	Liste de dérivées.....	34
3.2.3	Dérivées d'ordre supérieur	34
3.2.4	Dérivées de « fonctions vectorielles »	35
3.2.5	Fonctions complexes d'une variable réelle.....	35
3.3	Fonctions trigonométriques inverses et fonctions hyperboliques inverses.....	36
3.3.1	Fonctions trigonométriques inverses	36
3.3.2	Fonctions hyperboliques inverses	39
3.4	Etude de fonctions	40
3.5	Courbes paramétrées.....	44
3.5.1	Courbes paramétrées, vecteur tangent, vecteur normal.....	44

3.6	Maxima et minima	48
3.6.1	Valeurs stationnaires	49
3.6.2	Extrema locaux (ou extrema relatifs).....	49
3.6.3	Extrema absolus	50
3.7	Approximation linéaire; différentielles.....	51
3.7.1	Approximation (locale) linéaire d'une fonction....	51
3.7.2	Différentielles	53
3.8	Précision de l'approximation linéaire.....	55
3.8.1	Que vaut l'approximation linéaire?.....	55
3.8.2	Précision en un point	55
3.8.3	Précision dans un intervalle.....	56

CHAPITRE 4 INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE

4.1	Intégrale définie.....	57
4.1.1	Calcul approché de certaines aires.....	57
4.1.2	Intégrale de Riemann	60
4.1.3	Intégrales et aires.....	62
4.1.4	Intégrale et travail.....	63
4.2	Propriétés de l'intégrale définie	63
4.2.1	Quelques propriétés élémentaires.....	63
4.2.2	Théorème de la moyenne.....	65
4.2.3	Changement du symbole de la variable d'intégration.....	66
4.3	Intégrale indéfinie (primitive).....	66
4.3.1	Primitive	66
4.3.2	Recherche de primitives.....	67
4.4	Intégration de fonctions rationnelles	69
4.4.1	Fonctions rationnelles.....	69
4.4.2	Fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques.....	72

4.5	Théorème fondamental du calcul infinitésimal.....	72
4.5.2	Méthode d'intégration.....	74
4.5.3	Dérivées d'intégrales dépendant de leurs limites ..	75
4.6	Intégrales généralisées (appelées aussi intégrales impropres).....	75
4.6.1	Intégrales avec des bornes infinies (intégrales impropres de seconde espèce).....	75
4.6.2	Intégrales de certaines fonctions discontinues (intégrales impropres de première espèce).....	78
4.7	Applications des intégrales.....	80
4.7.1	Aire sous une courbe paramétrée.....	80
4.7.2	Aire délimitée par une courbe fermée.....	81
4.7.3	Aire en coordonnées polaires.....	81
4.7.4	Longueur d'un arc de courbe (plane).....	82
4.7.5	Longueur d'un arc paramétré.....	82
4.7.6	Abscisse curviligne comme paramètre.....	83
4.7.7	Abscisse curviligne et vecteur tangent.....	83
4.7.8	Volume.....	84
4.7.9	Volume d'un corps de révolution.....	84
4.7.10	Aire d'une surface de révolution.....	84
4.8	Courbure, cercle osculateur.....	85
4.8.1	Calcul de la courbure.....	85
4.8.2	Rayon de courbure, cercle osculateur et centre de courbure.....	86

CHAPITRE 5 SÉRIES

5.1	Séries numériques, séries alternées.....	87
5.1.1	Séries numériques.....	87
5.1.2	Séries alternées.....	88

5.1.3	Convergence absolue.....	89
5.1.4	Séries complexes.....	90
5.2	Séries à termes positifs, critères de convergence.....	90
5.2.1	Tests de d'Alembert et de Cauchy (test du quotient et test de la racine $n^{\text{ième}}$).....	91
5.2.2	Cas particulier des tests de d'Alembert et de Cauchy.....	92
5.2.3	Comparaison avec une intégrale.....	92
5.3	Suite de fonctions, séries de fonctions, convergences simple et uniforme.....	93
5.3.1	Suites de fonctions réelles.....	93
5.3.2	Séries de fonctions réelles.....	95

CHAPITRE 6 SÉRIES DE TAYLOR

6.1	Approximations locales par des polynômes.....	97
6.2	Formule de Taylor.....	99
6.2.1	Précision de l'approximation linéaire.....	99
6.2.2	Une autre définition de la dérivée.....	100
6.2.3	Précision de l'approximation d'ordre n	101
6.3	Séries de Taylor.....	102
6.3.1	La notion de série de Taylor.....	102
6.3.2	Exemples de fonctions entières.....	103
6.4	Domaine de convergence.....	104
6.4.1	Convergence des séries entières.....	104
6.4.2	Calcul du rayon de convergence.....	106
6.4.3	Convergence et singularités.....	106
6.5	Opérations élémentaires sur les séries entières.....	107
6.6	Intégration et dérivation des séries entières.....	110



CHAPITRE 7 CALCUL DIFFÉRENTIEL DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

7.1 Fonctions différentiables, dérivées partielles.....	111
7.1.1 Fonctions différentiables.....	111
7.1.2 Dérivées partielles.....	112
7.1.3 Fonctions différentiables et dérivées partielles ...	114
7.1.4 Différentielles totales.....	115
7.1.5 Application : propagation d'erreurs de mesure ...	115
7.1.6 Commutativité des dérivées partielles.....	116
7.2 Dérivées de fonctions composées.....	116
7.2.1 Dérivée totale (ou dérivée le long d'une courbe).	116
7.2.2 Dérivées partielles de fonctions composées.....	117
7.2.3 Dérivées de fonctions implicites.....	118
7.3 Dérivée directionnelle, gradient.....	119
7.3.1 Dérivée suivant une direction donnée (dérivée directionnelle).....	119
7.3.2 Notion de « champ ».....	120
7.3.3 Gradient.....	120
7.4 Développement de Taylor.....	121
7.5 Maxima et minima.....	122
7.5.1 Trois problèmes à distinguer.....	122
7.5.2 Résolution des trois problèmes.....	124
7.6 Extrema liés (multiplicateurs de Lagrange).....	125
7.6.1 Valeurs stationnaires avec contraintes.....	125
7.6.2 Généralisations.....	126

CHAPITRE 8 INTÉGRALES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

8.1	Intégrales doubles.....	127
8.1.1	Calcul de certains volumes.....	127
8.1.2	Intégrales doubles en général.....	131
8.2	Changement de variables dans une intégrale double....	132
8.2.1	Jacobien.....	132
8.2.2	Intégrales doubles en coordonnées curvilignes....	133
8.3	Intégrales triples.....	133
8.3.1	Coordonnées cartésiennes.....	133
8.3.2	Coordonnées curvilignes.....	134
8.3.3	Applications.....	135
8.3.4	Formule de Steiner-Huygens.....	136
8.4	Intégrales dépendant d'un paramètre.....	137
8.4.1	Limites d'intégration constantes.....	137
8.4.2	Limites d'intégration variables.....	137

CHAPITRE 9 CHAMPS VECTORIELS PLANS ET POTENTIELS

9.1	Intégrales curvilignes planes.....	139
9.1.1	Définition des intégrales curvilignes.....	139
9.1.2	Calcul des intégrales curvilignes en coordonnées cartésiennes.....	140
9.1.3	Existence de l'intégrale curviligne.....	141
9.1.4	Exemples d'intégrales curvilignes.....	141
9.1.5	Indépendance de la paramétrisation.....	142
9.1.6	Règles de calcul.....	142
9.1.7	Formule de Riemann-Green.....	143
9.2	Gradient et potentiel.....	144
9.2.2	Recherche du potentiel.....	145

9.3	Différentielles totales.....	146
9.3.1	Formes différentielles.....	146
9.3.2	Intégration des formes différentielles.....	146
9.3.3	Analogies entre champs vectoriels et formes différentielles.....	147
CHAPITRE 10 EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 1		
10.1	Croissance exponentielle.....	149
10.2	Equations à variables séparées, changement de variables, équations homogènes.....	150
10.2.1	Equations à variables séparées.....	150
10.2.2	Changement de variables.....	151
10.2.3	Equations homogènes.....	152
10.3	Equation aux différentielles totales, facteur intégrant... ..	153
10.3.1	Equation différentielle des lignes de niveau.....	153
10.3.2	Intégration des équations aux différentielles totales.....	153
10.3.3	Facteur intégrant.....	154
10.4	Familles de courbes, enveloppes, équation de Clairaut..	154
10.4.1	Famille de courbes.....	154
10.4.2	Enveloppes d'une famille de courbes.....	155
10.4.3	Equation de Clairaut.....	155
10.5	Existence et unicité.....	156
10.5.1	Théorème d'existence et d'unicité.....	156
10.5.2	Approximation successive.....	157
CHAPITRE 11 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS		
11.1	L'équation $y' + ay = f(x)$	159
11.1.1	L'équation homogène $y' + ay = 0$	159

11.1.2	L'équation non homogène $y' + ay = f(x)$	160
11.1.3	Recherche d'une solution particulière.....	160
11.2	L'équation $y'' + ay' + by = 0$	161
11.2.1	Structure de l'ensemble des solutions.....	161
11.2.2	Recherche de deux solutions linéairement indépendantes.....	161
11.3	L'équation $y'' + ay' + by = f(x)$	162
11.3.1	La solution générale	162
11.3.2	Recherche d'une solution particulière.....	163
11.4	Seconds membres particuliers.....	164
11.4.1	Oscillations forcées	164
11.5	L'équation $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$	166
11.5.1	Recherche de n solutions linéairement indépendantes.....	166
11.5.2	Problème aux valeurs initiales.....	167
11.5.3	Wronskien.....	168
11.6	L'équation $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x)$	169
11.6.1	Solution générale	169
11.6.2	Recherche d'une solution particulière.....	169

CHAPITRE 12 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS VARIABLES

12.1	Ensemble des solutions d'une équation linéaire.....	173
12.1.1	Equation homogène.....	173
12.1.2	Equation non homogène	174
12.2	Equation d'Euler.....	175
12.3	L'équation $y' + a(x)y = f(x)$	176
12.3.1	L'équation homogène $y' + a(x)y = 0$	176
12.3.2	L'équation non homogène $y' + a(x)y = f(x)$	176
12.4	Equations à coefficients analytiques.....	176

CHAPITRE 13 MÉTHODES PARTICULIÈRES, EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES	
13.1 Abaissement de l'ordre	179
13.2 Exemples d'équations non linéaires	180
13.2.1 Equation de Bernoulli	180
13.2.2 Equation de Riccati	180