****

تقديم الطالب : ..لورا ديب...........

الصف:.العاشر............

تاريخ : ...15 /1/2015.م........

اشراف: ...الأستاذ حبيب عيسى.........

تقرير حلقة بحث بعنوان :

المعادلات الديفونتية

Diphontine equations))))

## **إشكالية البحث :**

## هل للمعادلات الديفونتية دور في حل المسائل؟

## هل للمعدلات الديفونتية طرق معينة للحل ؟؟

## **المقدمة::**

## **المدخل:**

## سميت المعادلات الديفونتية بهذا الاسم نسبة إلى العالم ديوفونتس الأسكندري الذي كان أول من بحثها بالتفصيل في كتابه ((المسائل العددية)) بالإضافة إلى الفيثاغورثيين الذين كانوا أول من حل المعادلوذلك قبل ديوفونتس بأكثر من قرنين ؛ كما أن هيرون الاسكندري الذي عاش بين عام1500قبل الميلاد إلى 250 م قد حل الكثير من المسائل الديفوتية مثل ايجاد مستطيلين محيط الأول يساوي 3امثال محيط الثاني ومساحة الأول تساوي مساحة الثاني أي و

## وقد تعامل مع هذة المعادلات الكثير من الشعوب ومنهم الهنود والصينيين ؛واأبرزهم الهندي اريابهاتها((476ق .م)) الذي يُعتقد بأنه أول من وضع حلاً عاماً للمعادلات الديفونتية بمجهولين .

## كما تعامل العرب والمسلمون مع المعادلات الديفونتية ؛ومنهم ابو كامل شجاع بن اسلم المصري (850م-930م)الذي وضع في كتابة (الطريف في الحساب) أن بعض المسائل تبقى وحيدة الحل وبعضها له عدة حلول بأعداد صحيحة وهي المسائل الديفونتية وبعضها له عدة حلول لأعداد ليست صحيحة وقد أورد العديد من الأمثلة وحلها بطريقة تختلف عن الاسلوب الهندي.

## كما درس السمؤل المغربي في كتابة (الباهر في الجبر)معادلات من الشكل و

## بالاضافة الى العديد من العلماء العرب والمسلمين اذين بحثو في هذا المجال وتناولو العديد من المعادلات الديفونتية وأوجدو حلول لها.

**الباب الأول:((المعادلات الديفونتية**

**الفصل الأول :تعريفها وبعض الأمثلة عنها:**-

### هي معادلات يقل عددها عن عدد المجاهيل فيها أي قد يكون لها عدد كبير من الحلول الممكنة مع العلم ان حلولها جميعها اعداد صحيحة.[[1]](#footnote-1)

### و بعض الأمثلة عنها :

### 1-المعادلة وعدد حلولها غير منتهية فكل ثنائية مرتبة (a,9-a) يمثل حل حيث aعدد صحيح .[[2]](#footnote-2)

### 2-المعادلة ولها ايضا عدد لانهائي من الحلول حيث أن عدد فردي دائما

### 3-المعادلة حلولها[[3]](#footnote-3)

### 32+42=52

### (-3)2+(-4)2=52

### (-4)2+32=52

### 32+(-4)2=52

### 42+(-3)2=52

### 42+32=52

### (-4)2+(-3)2=52

### (-3)2+42=52

## 4-المعادلة :

ولها عدد لا نهائي من الحلول حيث كل حل من هذه الحلول عبارة عن ثلاثيةتسمى ثلاثيات فيثاغورث وكل من عدد صحيح.[[4]](#footnote-4)

5-المعادلة حيث n>3 أو يساويه[[5]](#footnote-5)

ودرست من قبل فيرما مؤكداً عدم وجود أعداد صحيحة تحقق تلك المعادلة بشرطxyz لا تساوي الصفر .

6-المعادلةحيث ليس مربعا كاملاً وتنسب إلى الإنجليزي جون بل(1611\_1996م) مخمناً وجود حل على الأقل لتلك المعادلة ويختلف عن

على سبيل المثال المعادلة حيث أن أقل قيم ل و تحققها هي و

7-المعادلة الديفونتية التي وضعها كاتلان سنة 1844م وخمن أنه إذا كان

, عندها يكون للمعادلة حل وحيد وهو وأثبت فهيلسكو سنة 2003م

8-المعادلة الديفونتية [[6]](#footnote-8)

،والحلول الوحيدة لها في Ƶ هي

 5ǃ+1=112

, 7ǃ+1=712

 4ǃ+1=52

 حيثn≤5000

**((أنواع المعادلات الديفونتية))** **الباب الثاني:**

للمعادلات الدايفونتية أنواع ,ولعل أبرزها المعادلات الديفونتية الخطية وغير الخطية ,حيث يتميز كل منها بتطبيقاته و استخداماته وطرائق حله التي تختلف عن غيره من الأنواع الأخرى.

 **-الفصل الأول:المعادلات الديفونتية الخطية:**

**أولاً:تعريف المعادلات الديفونتية الخطية؛**

يعتبر هذا النوع من أبسط أنواع المعادلات الديفونتية

ومن أنواعها :1) -المعادلة وتسمى معادلة خطية ذات مجهولين. [[7]](#footnote-9)

 2)-المعادلة وتسمى معادلة ديفونتية بثلاث مجاهيل. [[8]](#footnote-10)

**ثانياً...بعض المبرهنات الأساسية في المعادلات الديفونتية الخطية:**

 **المبرهنة(1): ((**يوجد للمعادلة الديفونتية حل إذا وفقط إذا كان ))[[9]](#footnote-11)

 **البرهان[[10]](#footnote-12):**لنفرض أن إذاً يقسم وعليه فإن يقسم أي إذا كان حلاً للمعادلة.

 عكسياً,إذا كان يقسم فإن حيث عدد صحيح. من تعريف يوجد صحيحين بحيث. بضرب طرفي المساواة في نحصل على:

إذاًحل للمعادلة وهكذا تثبت النظرية.

**المبرهنة(2)[[11]](#footnote-13):**إذا كان حل للمعادلة الديفونتية فإن جميع حلولها تعطى من العلاقة

حيث عدد صحيح

 **البرهان[[12]](#footnote-14):** ليكن . إذا, . افرض أن حل خاص وأن أي حل آخر. إذا

ومنه وبالقسمة على ينتج

 (\*)

وحيث فإنإذ يوجد عددين صحيحين k بحيث:

أي أن *X=x0-k ,y=y0+k*

بقي أن نثبت أن كل زوج على الصوة *(x0 +nk ,y0 – mk)* هو حل للمعادلة الديفونتية و هذا ينتج مباشرة بالتعويض في المعادلة الديفونتية

*ax +by=ax0 – k +by0 +k =ax0 + by0 = c-*

من خلال هذه النظرية نستطيع إيجاد جميع حلول المعادلة الديفونتية إذا علمنا حل واحد لها.

* **(مبرهنة 3)[[13]](#footnote-15):** يوجد حل للمعادلة الديفونتية :
* حيث إذا و فقط إذا كان

 **البرهان[[14]](#footnote-16) :** ليكن ، وليكن حلا للمعادلة إذا لكن لكل

إذا و عليه فإن.

 لإثبات العكس نفرض أن. إذن يوجد بحيث أن. لكن إذا يوجد بحيث ، و عليه فإن ، و بالتالي فإن :

حل للمعادلة.

**مثال توضيحي[[15]](#footnote-17) :** حل المعادلة الديفونتية التالية :

حل المعادلة الديفونتية التالية :

أولا نوجد (252,54) (252,-54)و ذلك عن خوارزمية إقليدس .

252= 54 .4+63

54=36 . 1 +18

36=18 . 2 + 0

إذاً (252,-54)=18

نلاحظ أن 18|36 وهذا يؤدي أن المعادلة لها حل

نقسم المعادلة على (252,-54) فينتج لدينا

نأخذ المجهول الذي يكون القيمة المطلقة لمعامله هي الصغرى و نجعله في طرف و بقية المعادلة في طرف آخر .

نقسم على 3

 - =

 - - =

 +( - )=

يجب أن يكون - عددا صحيحا ً

 - = 14

و منه : 2 -2 = 3

 نضع المجهول الذي أمثاله القيمه المطلقة الصغرى في طرف و بقية المعادلة في طرف آخر

3 =3 +2

 نقسم على 2

 = +1

 = u + +1

 = + +1

يجب أن يكون عددا صحيحا

 =

هذا يؤدي =

ونتوقف عند هذا الحد لأن أصغر قيمة مطلقة لمعاملات المجاهيل هي 1

نعوض قيمة = بشكل تراجعي في المعدلات السابقة لنوجد قيمة بدلالة.

أولاً:نعوض في+1 = +

ثانياً: نعوض في

14-2=

42+12=

ومنه

فإذاً الحل العام للمعادلة هو )

وكلما أعطينا قيمة صحيحة ل سنحصل على حلّ خاص

t=0 هذا يؤدي =0+1 t=1 هذا يؤدي

 =0+1

 =0

 الحل ()=(1,4) الحل (4,18)

ولو عوضنا قبمة الحل الخاص (1,4) في المبرهنة (2) يصبح الحل العام بدلالة العدد الصحيح t:

**الباب الثالث بعض الطرق لحل المعادلات الديفونتية**

**تتعدد الطرق لحل المعادلات الديفونتية وتتنوع اسستخداماتها ,حيث تفيد كل منها في حالات معينة ومن هذه الطرق:
1)-طريقة التحليل إلى جداء عوامل.
2)-طريقة المتراجحات
3)-طريقة الmod (باقي القسمة)
4)-طريقة فيرما للسلاسل غير المنتهية.
5)-طريقة الحل العقدي.**

**-الفصل الأول: طريقة التحليل إلى جداء عوامل:**

 **مثال توضيحي(1)[[16]](#footnote-18):**أوجد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة :

نلاحظ أن الطرف الأول يمثل متطابقة تربيعية (مربع فرق عدين)

 +1)( -1)=2 :

+1=1 +1=2 +1=-1 +1=-2

 -1=2 -1=1 -1=-2 -1=-1

عندها الحلول:(0,3),(1,2),(3,0),(-2,-1)

إذا كان +1)( -1)=-2:

+1=-1 +1=-2 +1=1 +1=2

- 1=2 -1=1 -1=-2 -1=-1

وعندها الحلول :(-3,2),(0,-1),(-2,3),(1,0)

**\_مثال توضيحي(2):[[17]](#footnote-19)**أوجد جميع الثنائيات الصحيحة الموجبة التي تحقق:

وعندها : \_ إما: -6-()=-1 أو: -6-()=-13

-6+()=13 -6+()=1

ومنه: -()=5 ومنه: -() =-7

+()=19 +()=7

وبالتالي=12 وبالتالي: =0

 =7 =7

 وعندها الحلول الممكنة جميعها (0,7),(7,0),(3,4),(4,3)

  **مثال توضيحي(3):**[[18]](#footnote-20)أوجد الحلول الصحيحة للمعادلة التالية :

 الحل: نفرض

عندها تصبح المعادلة

 إما +1=5 أو +1=1 أو+1=-5 أو +1=-1

+4=1 4=5 4=-1 4=-5

ومن=4 ومنه=0 ومنه=-6 ومنه =-2 1 =-5 =-9

الحلول الممكنة :(0,1),(1,0),(-6,1),(1,-6)

الحلول النهائي ة:(1,2),(2,1),(-5,2),(2,-5).

**-الفصل الثاني:حل المعادلات الديفونتية باستخدام المتراجحات :**

تفيد هذه الطريقة في حصر قيم جميع المتغيرات أو بعضها في مجالات محددة ومن ثم استخدام هذه المجالات في إيجاد الحلول.[[19]](#footnote-21)

**مثال توضيحي (1):[[20]](#footnote-22)**

أوجد جميع الثنائيات من الأعداد الصحيحة التي تحقق

الحل:

نلاحظ أن جميع الثنائيات من الشكل هي حلول لهذه المعادلة

إذا كانت عندها تصبح المعادلة

 نضرب الطرفين ب 2

نضيف 2 للطرفين

وهذا يؤدي

وبالتالي فإن قيم كل من المتغيرين محصورة ضمن المجال [0,2]

فالثنائيات الصحيحة التي تحقق هذه المعادلة هي : (1,0) , (0,1) , ( 2,1) , 1,2)), ( 2,2 )

**مثال توضيحي رقم (2):[[21]](#footnote-23)**

أوجد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق

نفرض أن وبالتالي يكون

وبالتالي أي

نضرب الطرفين ب فنحصل على :

وبالتالي فإن { 2,3,4,5}

لا يمكن أن تكون مساوية للصفر لأن كسر غير معرف ولا يمكن أن يكون مساويا للواحد لأنه عندها تصبح قيممة الكسر تساوي الواحد والواحد أكبر من

ولكن وفق المعادلة المعطاة ≤

اذا كانت = 2 عندها =

= نعلم أن هذا يؤدي+

 ومنه 20 ونعلم أن هذا يؤدي أن 10

يؤدي{ 11, 12…,20} ومنه = أي

= 10+ بالتالي يجب أن يكون Y-10 | 100 لأن ( عدد صحيح موجب )

عندها تكون الحلول الممكنة, (2,11,110) , (2,12,60) , (2,14,35) 2,15,30)) , (2, 20, 20)

اذا =3 عندها = +

ومنه {3,4,5,6,7}

وبالتالي = أي يجب أن يكون 4-1 | 15 وبالتالي تصبح الحلول الممكنة 3,4,60)) , ( 3,5,15) , ( 3, 6,10 )

اذا كان = 4 عندها

{4,5}

= فالحل هو ( 4,4,10)

اذا كانت = 5 عندها =5 وبالتالي = 5 أي الحل هو (5,5,5)

**مثال توضيحي (3):[[22]](#footnote-24)**

أوجد جميع الرباعيات من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق

**الحل :** نعلم أن

+

وبالتالي < w2< ومنه

يمكن ان تساوي فقط

وهذا يقتضي أن تكون وبالتالي فالحلول هي.

حيث

**-الفصل الثالث:الحل باستخدام الmod :**

في العديد من لحالات نستخدم هذه الطريقة لإثبات أن المعادلة ليس لها حلول أو لحصر المجال الذي توجد ضمنه الحلول الممكنة.[[23]](#footnote-25)

**مثال توضيحي (1):[[24]](#footnote-26)**

أثبت أن المعادلة التالية ليس لها حلول

+1)2+( +2)2+……+( +2001)2= y2)

لنفرض أن = -1001 عندها ستصبح المعادلة بالشكل :

( -1000)2+( -999)2+..+( -1)2+ 2+( +1)2+ ..+( +1000)2= y2

وبالتالي y2= 2001 2+2

2001 2+(10001001667)= y2

نلاحظ أن القسم الأيسر مساوٍ ل 2 3

وبالتالي فهو لايمكن أن يكون مربعاً كاملاً

**مثال توضيحي (2):[[25]](#footnote-27)**

أوجد كل الأعداد الأولية p التي تحقق نظام المعادلات

+1 = 22

2+1= 22

التي لها حل في الأعداد الصحيحة من أجل قيمة كل من

لنعتبر من دون فقدان العمومية أن كل من x, y≥ 0 . لاحظ أن 2+1= 22 هذايؤدي

1= 22-2

+1 = 22

+(22-2)=22

+1 = 22  أي أنه عدد زوجي وبالتالي فإن p≠2 وأيضاً 1≡ 22 ( p) 22 ≡

 (1-)+2y2=22  هذا يؤدي 22≡ 22 p ومنه ≡ ±y p , بما أن عدد فردي.

بما أن لدينا = وبالتالي 2+1= 2()2

= 22-4++1 2+1

2= 22-4+

4 –=2  هذا يؤدي = 4-1 أي 4=+1

أي 2 2 = 4 وبالتالي =2 أو =0 ومنه = -1 أو = 7 وبالطبع -1ليس عدد أولي

عندما =7 الزوج =(2,5) هو الحل.

**-الفصل الرابع:طريقة فيرما للهبوط غير المنتهي :**

يمكن أن تصاغ هذه الطريقة على الشكل الآتي: (( لتكن خاصية تتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة و (n))n≥1 ) هي سلسلة القضايا :

 (n )  تعني أن nتحقق الخاصية

ليكن عدد صحيح موجب , لنفرض أن:

 متى كانت  (m) صحيحة من أجل كل عدد صحيح ,هذا يؤدي إلى أنه يجب أن يكون هناك عدد صحيح أصغر حيث من أجلها يكون  (j) صحيحاً

 وبالتالي : من أجل كل,  (n)  خاطئة

أي, إذا كان هناك عدد من أجله  (n) صحيحة يمكن لهذا العدد أن يشكل سلسلة

كل منها أكبر من , ولكن من أجل الأعداد الصحيحة الموجبة لا يوجد مثل هذه السلسة غير المنتهية))[[26]](#footnote-28).

 هناك حالتين خاصتين في هذه الطريقة تفيدان بشكل خاص في دراسة المعادلات الديفونتية :

**الحالة(1):** [[27]](#footnote-29)ليس هناك أي سلسلة من الأعداد الصحيحة الموجبة من الشكل

أو بصيغة مكافئة: إذا كان  أصغر عدد صحيح موجب يحقق الخاصية(n)  هذا يؤدي أن (n)  خاطئة من أجل كل .

**الحالة 2)):[[28]](#footnote-30)**إذا كانت سلسلة الأعداد الصحية الموجبة  i) i≥0  )تحقق المتراجحات

بالتالي يوجد هناك

**مثال توضيحي(1)**[[29]](#footnote-31):حل في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة :

**الحل:** لاحظ أن (0,0,0) هو الحل , سنثبت أنه لا يوجد أي حلول أخرى

أولاً: نفرض أن حلول غير بسيطة(nontrivial) بما أن , كلاهما ليس نسبي ، ليس من الصعب أن نرى أن

من

نستتج أن 2|

وبالتالي 8 23+213=413

أي 4 23+13=413

ولهذا السبب فإن 1=22 حيث  2ϵz+

بشكل مماثل  1=2 2 حيث  2ϵ +

حصلنا على الحل الجديد

حيث

بإكمال هذه الإجراءات ستتشكل لدينا سلسلة من الحلول الصحيحة الموجبة,من الشكل

وهذا يعارض الحالة(1)في طريقة فيرما للهبوط غير المنتهي.

**مثال توضيحي2))[[30]](#footnote-32):**حل في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة المعادلة التالية :

**الحل:**لاحظ أن الحل (0,) حيث ϵz+ وأيضاً (1,1)

سنثبت أنه لا وجود لأي حلول أخرى وذلك باستخدام طريقة فيرما للهبوط غير المنتهيي على العوامل الأولية للعدد .

 ليكن قاسم أولي للعدد ,وليكن أصغر عدد صحيح موجب يحقق

من نظرية فيرما الصغرى (( إذا كان عدد أولي و عدد صحيح بحيث فإن

نجد

وبناءً عليه فإن

إذا كانت لا تقسم بالتالي فإن وأيضاً وأيضاً

-1= -1

-1=-1

=

-1() =

وبالتالي فإن |-1

وهذا يتعارض مع كون أصغر عدد صحيح موجب يحقق

بالتالي فإن وأيضاً

والآن ليكن قاسم أولي للعدد ، من الواضح أن هو قاسم ل وأن

بإكمال هذا الإجراء ستتشكل لدينا سلسلة من القواسم الأولية للعدد

وهذا يناقض الحالة الأولى في طريقة فيرما للهبوط غير المنتهي.

**مثال توضيحي(3)[[31]](#footnote-33):** أوجد أكبر قيمة ل  إذا علمت هما عددان صحيحان بين (1) (1981) , تحقق

**الحل:**لاحظ أن الثنائية =(1,1) تحقق العلاقة السابقة

من ناحية أخرى, إذا كانت بالتالي من الضروري أن يكون ، أيضاً إذا كانت الثنائيةتحقق هذه العلاقة و

بالتالي فإن ، بإكمال المربع نحصل على

وبالتالي فإن تحقق العلاقة نفسها و

 باستخدام الحالة(2) في طريقة فيرما التحويل ()→() يجب أن بنتهي بعد عدة خطوات منتهية وهذا التحويل ينتهي فقط عندما 1 ولهذا السبب فإن جميع الثنائيات التي تحقق العلاقة نحصل عليها من(1,1)

وذلك بتطبيق التحوي العكسي ()→() مرات عديدة

(1,1)→(2,1)→(3,2)→(4,3)……..

وكل من هذه الثنائيات هي أرقام فيبوناتشي حيث تعرّف سلسلة)≥0) بالشكل

=0 , =1 , = +

حيث

وبناءً عليه فإن كل الأزواج تتألف من أرقام متتابعة فيبوناتشي

أكبر عدد في فيبوناتشي أقل من 1981 هو =1597

ولذلك فإن الإجابة على السؤال :

+=3524578

ملاحظة : في أول خطة من الحل السابق استخدمنا حقيقة أنه إذا كان لدينا معادلة ديفونتية تربيعية بمتغير واحد ولدينا حلّ لها ,بالتالي

نستطيع أن نحصل على حل آخر لها باستبدال المتغير بالجذر الآخر للمربع وهذه الملاحظة تفيد في العديد من المسائل.

**((الخاتمة))**

**\_النتائج:**

لقد وجدنا ان للمعادلات الديفونتية دور في حل المسائل فالعديد من المسائل التي تطلب منا تكون اجاباتها اعداد صحيحة وعندها لا يمكن التوصل الى الحل الا باستخدام هذا النوع من المعادلات كما لاحظنا من الامثلة المطروحة في بحثنا السابق حيث ان هذه المعادلات تفيد بشكل كبير لا يمكن ان ندرك اهميته الا عند تطبيقه في ايجاد الحلول .

كما وجدنا ان هناك العديد من الطرق لحل المعادلات الديفونتية منها ما هو تقليدي كالطرق المذكورة في بحثنا ومنها ما هو متقدم مثل ايجاد الحل العقدي للمعادلة الديفونتية وغيرها طرق عديدة , حيث ان كل معادلة ديفونتية تتطلب طريقة من هذه الطرق لحلها تختلف بحسب طبيعة المعادلة مما يسهل حصر الحلول الممكنة وايجادها بدقة .

**المقترحات :**

وفي النهاية اتمنى أن يتم ادخال هذا النوع من المعدلات في مناهجنا السورية وان يتم تدريسها نظرا لاهميتها وتطبيقاتها المتعددة في المسائل المعقدة

واتمنى أن أكون قد حققت الهدف المرجو من بحثي واوصلت لكم فكرة عن المعادلات الديفونتية وقدمت لكم موجزا عنها وبعض طرائق حلها. ولا ننسى أن هذة المعادلات هي بحث واسع جدا و ما قدمته منها هو جزء بسيط منها.

**...المراجع....**

-Tito Andrescu and Dorin andrica, ((An introduction to Diophantine equations)) –Springer science +business Media, LLC2010.

-فالح الدوسري ,(( مقدمة في نظرية الأعداد)).

 -مؤسسسة موهبة /إعداد الفريق السعودي/ , ((نظرية الأعداد2))

**....الفهرس....**

|  |  |
| --- | --- |
| العنوان | الصفحة |
| أولاً: المقدمة | 2 |
| ثانياً: الباب الأول: المعادات الديفونتية. | 3 |
| الفصل الأول:تعريف المعادلات الديفونتية وبعض الأمثلة عنها. | 3 |
| ثانياً: الباب الثاني: أنواع المعادلات الديفونتية. | 5 |
| الفصل الأول : المعادلات الديفونتية الخطية. | 5 |
| أولاً: تعريف المعادلات الديفونتية الخطية. | 5 |
| ثانياً: المبرهنة الأولى في المعادلات الديفونتية الخطية . | 5 |
| ثالثاً: المبرهنة الثانية في المعادلات الديفونتية الخطية. | 5 |
| رابعاً: المبرهنة الثالثة في المعادلات الديفونتية الخطية. | 6 |
| ثالثاً: الباب الثالث: بعض الطرق لحل المعادلات الديفونتية. | 10 |
| الفصل الأول: طريقة التحليل إلى جداء عوامل . | 10 |
| الفصل الثاني: طريقة المتراجحات. | 13 |
| الفصل الثالث: طريقة ال mod. | 16 |
| الفصل الرابع: طريقة فيرما للهبوط غير المنتهي. | 18 |
| الخاتمة | 23 |
| المصادر و المراجع | 24 |
| الفهرس | 25 |

1. . فالح الدوسري, مقدمة في نظرية الأعداد ص225 [↑](#footnote-ref-1)
2. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص36 [↑](#footnote-ref-2)
3. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص36 [↑](#footnote-ref-3)
4. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص36 [↑](#footnote-ref-4)
5. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص36 [↑](#footnote-ref-5)
6. فالح الدوسري, مقدمة في نظرية الأعداد ,ص228 [↑](#footnote-ref-8)
7. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص36 [↑](#footnote-ref-9)
8. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص36 [↑](#footnote-ref-10)
9. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص37 [↑](#footnote-ref-11)
10. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص37 [↑](#footnote-ref-12)
11. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص37 [↑](#footnote-ref-13)
12. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص37 [↑](#footnote-ref-14)
13. فالح الدوسري, مقدمة في نظرية الأعداد ,ص235 [↑](#footnote-ref-15)
14. فالح الدوسري, مقدمة في نظرية الأعداد ,ص235 [↑](#footnote-ref-16)
15. مؤسسة موهبة \_إعداد الفريق السعودي, نظرية الأعداد 2 , ص37 [↑](#footnote-ref-17)
16. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 4. [↑](#footnote-ref-18)
17. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page6 , [↑](#footnote-ref-19)
18. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page [↑](#footnote-ref-20)
19. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 13 , [↑](#footnote-ref-21)
20. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 13 , [↑](#footnote-ref-22)
21. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 14 , [↑](#footnote-ref-23)
22. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 14 [↑](#footnote-ref-24)
23. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 29 [↑](#footnote-ref-25)
24. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 29 , [↑](#footnote-ref-26)
25. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 30 , [↑](#footnote-ref-27)
26. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 48 , [↑](#footnote-ref-28)
27. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page48 , [↑](#footnote-ref-29)
28. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation page49, , [↑](#footnote-ref-30)
29. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation page49, , [↑](#footnote-ref-31)
30. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 49 , [↑](#footnote-ref-32)
31. Tito Andrescu and Dorin andrica , , An introduction to Diophantine equation , page 50 , [↑](#footnote-ref-33)