****الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية

المركز الوطني للمتميزين

مشروع بحثي في مادة الرياضيات بعنوان:

OUR GEO-COMPLEX NUMBERS

بإعداد الطلاب:

أشرف فرج

حاتم المغوش

لورا ديب

مارك جبور

للعام الدراسي:

2014-2015

الفهرس و المخطط:

المقدمة و الإشكالية ..............................................................................الصفحة 3

الباب الأول: أسس العدد العقدي ................................................................الصفحة 4

الفصل الأول:الشكل الجبري.......................................................... .الصفحة 6

الفصل الثاني:التعبير الهندسي عن الأعداد العقدية.................................. .الصفحة 12

الباب الثاني:التمثيل القطبي.................................................................... .الصفحة 14

الفصل الأول:الشكل المثلثي و الشكل الأسي........................................ .الصفحة 14

الفصل الثاني:الجذور النونية للعدد العقدي.......................................... .الصفحة 19

the nth cyclomotic polynomials........................................... .الصفحة 22

تطبيق the nth cyclomotic polynomials في الهندسة..................... .الصفحة 24

الباب الثالث:الأعداد العقدية و الهندسة........................................................ .الصفحة 26

الفصل الأول :بعض الخواص و المفاهيم الأساسية................................ .الصفحة 26

الفصل الثاني:التشابه المباشر........................................................ .الصفحة 29

المطلب الأول:خواص التشابه المباشر......................... .الصفحة 30

المطلب الثاني:التركيب......................................... .الصفحة 32

المطلب الثالث:التحليل القانوني للتشابه المباشر............... .الصفحة32

المطلب الرابع:المثلثات المتشابهة............................... .الصفحة 37

المطلب الخامس:المثلثات متساوية الأضلاع................... .الصفحة 38

الفصل الثالث:المعادلات الهندسية................................................... .الصفحة 40

المطلب الأول:معادلة المستقيم................................... .الصفحة 40

المطلب الثاني:معادلة الدائرة................................... .الصفحة 47

الباب الرابع:المثلثات و الأعداد المركبة...................................................... .الصفحة55

الفصل الأول:النظريات الأساسية في التشيفيانات.................................. .الصفحة55

الفصل الثاني:النقاط الأساسية في المثلث........................................... .الصفحة58

الفصل الثالث:الثوابت الأساسية في المثلث......................................... .الصفحة 60

الفصل الرابع:المسافات الأساسية في المثلث....................................... .الصفحة 65

الفصل الخامس: الجداءين الحقيقي والعقدية على الاعداد العقدية..................الصفحة 65

المطلب الأول :الجداء الحقيقي .....................................الصفحة 66

المطلب الثاني:الجداء العقدي ......................................الصفحة 68

المطلب الثالث:مساحة المضلع.....................................الصفحة 68

الباب الخامس:التطبيق العملي(حل المسائل)................................................ .الصفحة 70

النتائج والمقترحات.............................................................................الصفحة 107

الخاتمة..........................................................................................الصفحة 108

المصادر والمراجع.............................................................................الصفحة 109

المقدّمة والإشكالية:

* فكرة البشر عن كلمة "العدد" استًنبطت من تطوّر المجتمع البشري. فالأعداد الطبيعية كانت مثلاً تستعمل في العدّ و الحساب عند العديد من الحضارات، بخلاف أنظمة العدّ المعتمدة فيما سبق تلك العصور. و في الحقبة التّالية استطاع البشر تقديم الأعداد على شكل كسور و نسب من أجل الإجابة عن المشاكل الحياتيّة الاعتياديّة مثل هذه المشكلة القديمة " إذا نصيد سمكة، سيأخذ الأول ومنه سيأخذ الثّاني من كلّ عملية صيد".و من ثمّ عند نشوء الاقتصاد و اكتشاف النّظريات فيه حثَّ على قبول الأعداد السّالبة و الصّفر، و ذلك من أجل القدرة على التّعامل مع أعداد مثل الذي أوجده البابليين و العدد π الذي أوجده بدايةً اليونانيون.
* مفهوم الجديد ل"العدد" أتت من حاجتنا لحلّ مسائل عمليّة و محددة. ولدينا العدد العقدي الذي أتى من ضرورة حلّ معادلات مثل .مفهوم العدد العقدي مرتبط بشكل أساسي بالنظرية الأساسية في الجبر و من ثم كانت إلى حدّ بعيد الأساس لعلم التّحليل الرّياضي. وقد وضع أسس هذا العلم العديد من العلماء الفضولين بمعرفة كل تفاصيل هذا العلم المعقّد ولكن في بحثنا هذا سنتناول شرحاً مفصلاً عن الأعداد العقدية وعلاقتها بالهندسة و فروعها.
* و فيما بعد سنقدم نبذة تاريخية عن الأعداد العقدية و العلماء الذين وضعوا أسسها فنتمنى أن تستمعوا معنا بسحر الأعداد العقديّة...
* **إشكاليّة البحث:**
* مسائل الهندسة التي يأخذ حلها الإقليدي صفحات عدة و أيام هل سنجد طرق حلّ أفضل؟؟
* ما هي هذه الطّرق الممكن اعتمادها؟؟
* كيف حصلنا على خصائص هندسيّة جديدة بفضل الأعداد العقديّة؟؟
* **أهداف البحث:**
* القدرة على فهم أشكال العدد العقدي وتمثيله في المستوي.
* التّعرف على مرافق العدد العقدي و العمليات على الأعداد العقديّة.
* تطبيق الأعداد العقديّة في حلّ المعادلات والتّعرف على جذورها.
* تطبق الأعداد العقديّة في الهندسة المستوية.
* حلّ المسائل بطريقة أسرع وأسهل وأكثر فعاليّة.
* **نبذة تاريخية:**
* لنتعرف العلماء الذين وضعوا حجر الأساس لهذا العلم:
* فإن الأعداد العقديّة قد قُدمت أولاً من قبل العالم G.Cardano(1501-1576) في كتابه “Ars Magna” في الفصل 37 و قد تحدّث عن طريقة إيجاد حلول حقيقية لمعادلة من الدرجة الثالثة : غير أنّه قد وجد مشكلة و ريب في بعض العبارات الجبرية مثل () و قد أشار إلى أنّ التّفكير في مثل هذه العبارات "العذاب الفكري".
* R.Bombilie(1572): في مؤلفاته الثّلاثة في علم الجبر قد قدم الرمز i ووضع قواعد الحساب في المجموعة .
* A.Girard(1629): أطلق على العبارة الجبرية و ما يشبهها بالحلول المستحيلة.
* R.Descartes(1637): و هو من أهمّ العلماء الذين تعمّقوا في هذا الموضوع و أوّل من أطلق على مثل تلك الأعداد "الأعداد التخيليّة".
* E.Demoivre:ولد عام 1667م عالم في الرياضيّات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريّات رياضيّة تحمل اسمه. توفي عام 1754م. « ابراهام دي موافر» من أصدقاء « اسحاق نيوتن»،حيث نشر على التوالي سنة (1718)، (1738)، (1756) مساهماته في الاحتمال ضمن كتابه في المصادفة « مبدأ الفرص ». في سنة 1707م.اكتشف« ابراهام دي موافر » دستوره الشّهير:  
  .

**الباب الأول: أساسيات العدد العقدي:**

* يوجد مجموعة أعداد يرمز لها بالرمز  و تسمى بالأعداد العقدية وتكتب عناصرها كلها بشكل واحد فقط ألا و هو   حيث a , b عددان حقيقيان و i=  و هو عبارة عن العدد العقدي الأساسي الذي يعرف على أنه جذر المعادلة   و هذه المجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين هما الجمع و الضرب (أي مجموع أي عددين عقديين هو عدد عقدي و جداء أي عددين عقديين هو أيضاً عدد عقدي)مما يتيح لنا القول في هذه الحالة أن هذه المجموعة قد شكلت حقلاً يسمى حقل الأعداد العقدية و يرمز لهذه البنية بالشكل  .
* تعطى قواعد الجمع و الضرب في هذا الحقل بالشكل الآتي:

* كيف نثبت وجود مثل هذا الحقل؟
* لنأخذ الفضاء و لنزوده بقانوني الجمع و الضرب الداخليين على الشكل التالي:[[1]](#footnote-1)





* و بملاحظة سريعة نلاحظ انطباق خواص الجمع و الضرب عند كل من الحقلين السابقين مما يتيح لنا القول أن مجموعة الأعداد العقدية هي ناتجة في الأصل عن تزويد  بقانوني تشكيل داخليين هما الجمع و الضرب.
* وكما يمكننا بمجرد التجريب أن نتيقن الخواص التالية:
* إن قانوني التشكيل الداخليين الجمع و الضرب هما تجميعيان وتبديليان و أن الضرب هو توزيعي على الجمع.
* إن العنصر (0,0) هو الحيادي بالنسبة لعملية الجمع لأنه أياً يكن العددz من فإن z+(0,0)=z و الحيادي بالنسبة للضرب هو (1,0) لأنه أياً يكن العددz من فإن z .
* نظير العدد  (a,b) بالنسبة لعملية الجمع هو (-a,-b) لأن .
* نظير العدد بالنسبة لعملية الضرب هو العدد لأن .
* و الآن سوف نقوم بعملية ربط قوية ما بين الحقلين و و ذلك بإجرائنا لمطابقة ما بين عنصر x من  و ما بين العنصر (x,0) من  مما يتيح لنا أن نكتب أن و هذه المطابقة لا تطرح أية مشكلة:



* أي نستنتج أن جمع أي عددين أو جداهما لا يختلف سواء اعتبرناهما من  أو من .
* لنعود إلى العدد العقدي الأساسي i يمكننا تعريف العدد العقدي الأساسي i هذا بشكل آخر و هو أن  و بالتالي نجد أنه أياً كان العدد الحقيقي y فإن:
* و نعلم أنه أياً يكن العدد (x , y) من  فإن: 
* **الفصل الأول : الشكل الجبري للعدد العقدي :**
* **[[2]](#footnote-2)تعريــــــف**: إذا كان z عدداً عقدياً فلا يوجد إلا عدد واحد فقط من الشكل (x , y) حيث أن كل من x , y هما عددان حقيقيان يحقق الخاصة الآتية: 
* و في هذه الحالة نسمي العدد الحقيقي x بالجزء الحقيقي للعدد العقدي z و نرمز له بالرمز ونسمي y الجزء التخيلي للعدد العقدي z و نرمز له بالرمز  .و إذا كانت x=0 نقول عن العدد العقدي z أنه تخيلي صرف و إذا كانت y=0 عندئذ نقول عن العدد العقدي z أنه حقيقي . و كل عدد عقدي يمكن كتابته على شكل مجموع عددين تخيلي صرف و حقيقي.
* لنفرض أن: إذاً تعطى قواعد الجمع و الضرب للقسمين التخيلي و الحقيقي كالآتي:



* الإثبات توضحه المعادلات الآتية:



* و كذلك يمكننا استنتاج الخواص التالية:



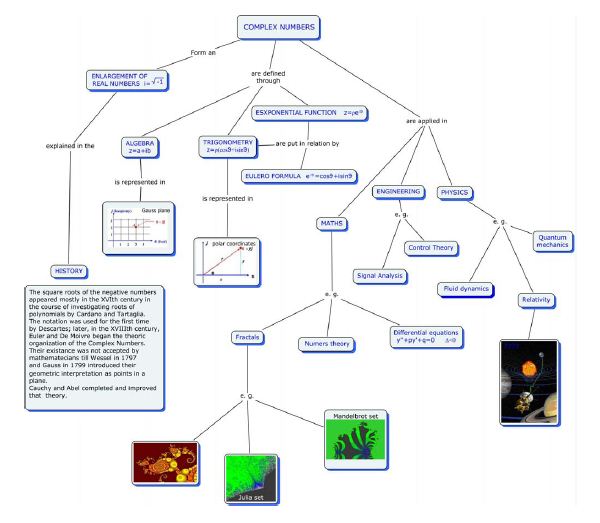


* قوى العدد i:لنلاحظ السلسلة الآتية:



و بملاحظة باقي قسمة الأس على أربعة نجد القاعدة الآتية: لنفرض أن العدد i مرفوع للقوة m هنا نناقش أربع حالات:





صورة 1

* **مرافق عدد عقدي:**
* إذا كان z=x + iy عدداً عقدياً حيث أن x , y عددان حقيقيان فإننا نسمي مرافق العدد العقدي z هو العدد الذي نرمز له بالرمز  و هو المعرف على العلاقة: .[[3]](#footnote-3)
* **مجموعة المبرهنات الأولى:**

1.  البرهان نستطيع أن نجد و بكل بساطة:

 وأن:

 و تم الإثبات.

1. مرافق مرافق العدد العقدي هو العدد نفسه. البرهان:
2. يكون العدد العقدي z هو عدداً حقيقياً إذا كان  و يكون العدد العقدي z تخيلياً صرفاً عندما .

**البرهان**:

عندما يكون  عندها يكون القسم التخيلي للعدد يساوي الصفر و بالتالي و حسب مبرهنة مرت سابقاً يعتبر العدد في هذه الحالة عددا حقيقياً . أما في حالة كان  كان القسم الحقيقي للعدد يساوي الصفر و سمي العدد تخيلياً صرفاً.

1. و نستطيع الملاحظة أن z1=z2 فقط في حال كان( Re(z1)=Re(z2وIm(z1)=Im(z2) .

مجموعة المبرهنات الثانية:

أياً كان العددان العقديان ئz1 , z2 فإن العلاقات التالية تتحقق:

1.  البرهان: لنفرض أن  و بالتالي :



1.  البرهان:



3. 

* **طويلة العدد العقدي:**

إذا كان z عدداً عقدياً كان العدد  عدداً حقيقياً موجباً,أسمينا العدد  طويلة العدد العقدي z و رمزنا إليها بالرمز |z| أي أن |z|= .[[4]](#footnote-4)

إذا كان  فإن  و بالتالي فإن  و بالتالي نستنتج الخواص التالية:

1. 

البرهان: هذا صحيح لأنفقط في حالة واحدة هو أن يكون x2 , y2

يساويان الصفر و هذا يعني أن يكون كل من x , y يساويان الصفر معاً و هذا الشرط يكافئ قولنا أن.

1. 

البرهان: حسب تعريف الطويلة نجد أنها تساوي  في حالة z أما في حالة  الطويلة تساوي  نلاحظ تساوي الطويلتين و تم الإثبات.

1. 

البرهان:هذا الكلام منطقي و لا حاجة لبرهانه نظراً لسهولته.

كما و تفيدنا الطويلة في التعبير عن مقلوب عدد عقدي ما حسب التالي:

 و في حالة كانت طويلة العدد العقدي تساوي الواحد فمرافق العدد العقدي تساوي مقلوبه.

مجموعة المبرهنات الثالثة: أياً كان العددان العقديان z1 , z2 العلاقات التالية محققة:

* 
* البرهان: نحن نعلم أن:
* 
* البرهان: بنفس الطريقة السابقة:

و قد تم البرهان.

*  : (متراجحة المثلث) البرهان:[[5]](#footnote-5)



و الآن نحسب قيمة المقدار الآخر:



نطرح المقدارين من بعضهما البعض و نرى من الأكبر:



و نحن نعلم أن ٌ وبالتالي هذا المقدار أكبر أو يساوي الصفر و بالتالي نجد أن:

.و تم البرهان.

*  (متراجحة المثلث الثانية) البرهان:

و لأن   استنتجنا الآتي:

 و بالتالي نجد أن:

 و هي المتراجحة المطلوبة.

* **حل المعادلات التربيعية:[[6]](#footnote-6)**
* ليكن لدينا معادلة تربيعية من الشكل:  في حال كان المميز سالب  نجد عبر الإتمام إلى مربع كامل الصيغة المكافئة الآتية:



* إذا نلاحظ أن: و بالتالي نجد أن:



⇚ و بالتالي نلاحظ أنه يمكننا كتابة هذه المعدلة بالشكل التالي:



* **هذه المعادلات التربيعية العادية و الآن ننتقل إلى المعادلات التربيعية العقدية:**
* ليكن zعدداً بحيث أن  و لنتأمل المعادلة التربيعية التالية : و بنفس الخطوات التي قمنا بها سابقا نجد أن: 

⇚ بالتالي: أو حيث أن هو المميز و الآن لنفرض أن أي أن المميز هنا يمكن كتابته من الشكل  . و هذه المعادلة التربيعية السابقة لها الحلول الآتية:

حيث أن r هي طويلة المميز و الرمز  هو إشارة إلى العدد الحقيقي v.و من ذلك نجد أن جذور المعادلة الأولى و الأصلية تعطى بالعلاقة:

كما ونستطيع أن نلاحظ أن  وأن

و أن المعادلة تكتب التالي:  .

* **الفصل الثاني :التعبير الهندسي عن الأعداد العقدية:[[7]](#footnote-7)**
* أولا كوننا قد عرفنا العدد العقدي z على أنه من الشكل  حيث أن x ,y هما عددان حقيقيان لذلك من المنطقي قولنا أنني أستطيع أن أقرن بكل عدد عقدي من  نقطة ما من المستوي  لها الإحداثيات  .
* لنعرف بعض الرموز لتساعدنا على فهم التمثيل الهندسي:
* لتكن p هي مجموعة من النقاط في الفضاء  المزود بقانون الإحداثيات xOy ولنعرف تابعا نرمز له بالرمز φ يقرن كل عدد عقدي من المطلق بإحداثيات النقطة التي تمثله من المستقر و له الشكل التمثيلي الآتي



* نسمي النقطة السابقة بالصورة الهندسية للعدد العقدي.و في هذه الحالة نسمي التمثيل العقدي للنقطة  و كما سنرمز بالرمز  لندلل على أن التمثيل العقدي للنقطة M هو العدد العقدي z.
* مرافق العدد العقدي هو العدد العقدي و صورته الهندسية هي تماثل صورة العدد العادي و لكن معكوسة على محور  و بالتالي إحداثيات النقطة الممثلة له هي .
* و صورة العدد –z الذي هو المعكوس الجمعي للعدد هي النقطة  و التي نتجت عن تطبيق انعكاس بالنسبة للمبدأ على النقطةz .
* و كما نستطيع أن نلاحظ فإن التابع السابق يربط مجموعة الأعداد الحقيقية بالمحور  كما و أنه يربط الأقسام التخيلية بالمحور  مما يشكل لنا نظام إحداثيات للأعداد العقدية و في هذه الحالة نسمي المستوي بالمستوي العقدي.
* وبشكل آخر يمكننا تعريف العدد العقدي  عن طريق الشعاع و ليكن  = حيث أن النقطة  هي صورة العدد .
* **التعبير الهندسي عن الطويلة:[[8]](#footnote-8)**
* لنفرض أن هو عدد عقدي و أن النقطة  هي صورته فإن المسافة الإقليدية أو الطول الإقليدي للقطعة المستقيمة هو : و بالتالي طول OM هو  و بالتالي كما نلاحظ فإن طويلة العدد العقدي هي طول القطعة المستقيمة وهو يساوي أيضاً طويلة الشعاع  حيث.
* و من أجل عدد حقيقي موجب r فإن مجموعة الأعداد العقدية التي طويلتها تساوي تتقاطع أو بالأحرى يمكن التعبير عنها بالدائرة الآتية  حيث هي الدائرة التي نصف قطرها هو r و مركزها هو .
* فإذا كان  فهي تعبر عن النقاط الداخلية في الدائرة و إذا كان فهي تدل على النقاط التي تقع خارج الدائرة. و إذا كان كانت تدل على النقاط التي تقع على الدائرة نفسها.
* **التعبير الهندسي عن العمليات الجبرية:[[9]](#footnote-9)**
* **الجمع:**
* ليكن لدينا العددان العقديان  اللذان يعبر عنهما الشعاعان التاليان نلاحظ أن مجموع العددين السابقين هو كالتالي: و نلاحظ أن مجموع الشعاعين هو كالتالي:
*  و إن مجموع العددين العقديين يتقاطع بشكل أساسي مع مجموع الشعاعين (ملاحظة: لجمع عددين عقديين و تمثيلهما رسمياً نقوم بجمع الشعاعين الممثلين لهما على المستوي و ذلك من خلال قاعدة شال في الجمع الشعاعي ]مجموع شعاعين غير متعاقبين هو شعاع مبدؤه المبدأ المشترك للشعاعين و منتهاه هو الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع المنشأ على هذيت الشعاعين[ .

أو يمكننا بكل بساطة أن نقوم بالجمع العادي ثم نمثل الناتج على المستوي.

* **الطرح :**
* حيث بشكل عام يوصف طرح عددين على أنه في الحقيقة جمع مع المعكوس يمكننا الاستفادة من هذه الحقيقة بأن نمثل طرح عددين عقديين بأن نقوم بطرح الشعاعين الممثلين لهذين العددين العقديين و يتم ذلك من خلال عكس أحد الشعاعين عبر المبدأ و جمعه مع الشعاع الآخر بنفس القاعدة التي ذكرناها سابقاً. أو نقوم بالعملية ثم نمثل النتيجة على المستوي.(ملاحظة: و طبعاً كل هذه النتائج وصلنا إليها بعد أن قمنا بمقاطعة الطرح الشعاعي مع طرح الأعداد العقدية).
* **الضرب:**
* ليكن عدداً عقدياً بحيث أن و ليكن الشعاع الموافق له  و إذا كان  عدداً حقيقياً نلاحظ أن المضروب  يتقاطع مع الشعاع  و نلاحظ أنه إذا كان  عدداً موجباً فإن الشعاعين لهما نفس التوجيه و نلاحظ أن  .
* أما إذا كان العدد السابق عدداً سالباً فإن الشعاع الناتج يعاكس الشعاع الأصلي في التوجيه و يكون: و بالطبع إذا كان هذا العدد يساوي الصفر فإن الشعاع الناتج يساوي الشعاع الصفري.
* **الباب الثاني: التمثيل القطبي:**
* **الفصل الأول : الشكل المثلثي و الأسي:**
* ليكن لدينا المستوي الإحداثي و النقطة  نقطة ما فيه وليكن العدد الحقيقي الموجب حيث  الذي يسمى نصف القطر القطبي للنقطة M.و لتكن  هي الزاوية ما بين و المحور الموجب '.
* الزوج أو الثنائية  تسمى الإحداثيات القطبية للنقطة M و نقطة المبدأ o تكون طويلتها تساوي الصفر و زاويته غير معرفة. و لكل نقطة ما M يوجد نقطة تقاطع وحيدة و فريدة و هيp للشعاع OM مع دائرة الوحدة و هذه النقطة P لها نفس زاوية العدد العقدي الذي نريد تمثيله مما يتيح لنا كتابة أن :  و بذلك من السهل جداً أن نحصل على الإحداثيات القطبية من الديكارتية و بالعكس (للحصول على الإحداثيات القطبية من الديكارتية نسحب الطويلة عامل مشترك و الأعداد التي بقيت في الداخل العدد المضروب منها ب هو زاوية العدد العقدي و العدد الآخر هو .[[10]](#footnote-10)
* و الآن لنعتبر أن هي نقطة من المستوي و أن  هي طويلة الشعاع OM ولتحديد الزاوية بهذا العدد نناقش حالتين:

1. **الحالة الأولى**: و نحن نعلم أن و بالتالي  حيث أن k تأخذ القيم الآتية و ذلك تبعاً لإشارة ال و مكان وقوعها من الأرباع:

عندما يكون 

عندما يكون و أي

عندما يكون 

1. الحالة الثانية عندما يكون و تكون



* ليكن عدداً عقدياً حيث  يمكن كتابة هذا العدد بالشكل: حيث أن هو عدد حقيقي موجب و هما الإحداثيات القطبية لصورة العدد .
* إن  هي زاوية صورة العدد z تسمى زاوية العدد العقدي z.و نصف القطر القطبي r لصورة العدد z هو عدد حقيقي موجب يساوي طويلة العدد z.و عندما يكون z لا يساوي الصفر فإن طويلته و زاويته دائماً قابلان للتحديد و دائماً معرفان. و الآن ليكن  و لتكن  إذاً يصبح تمثيل العدد العقدي كالآتي: و بالتالي:
* و بالتالي أي عدد عقدي يمكن تمثيله من الشكل السابق حيث عدد حقيقي موجب و الزاوية هي زاوية تنتمي إلى  و يمكن أن نستنتج أنه أياً يكن عددان عقديان فإنهما متساويان إذا كان r1=r2 و كان t1-t2= كما و نسمي مجموعة الزوايا الممددة للعدد z أي هي مجموعة زوايا العدد العقدي و مما يعني أنه إذا كانت t هي أحد زوايا العدد العقدي تكون ) تساوي .
* و الآن و قبل أن نكمل التمثيل القطبي لا بد لنا من أن ننوه إلى أنه يمكن كتابة كل عدد عقدي بالشكل  حيث أن r هي الطويلة و e هو العدد النيبري.و لنثبت ذلك لا بد لنا من أن نثبت أن  . و سنثبت ذلك من خلال منشور تايلور الذي يملك الصيغة الآتية:
* بفرض أن الدالة  قابلة للاشتقاق  مرة متتالية في جوار ما  للنقطة ، فإذا كانت  تنتمي إلى هذا الجوار، تكون العلاقة التالية صحيحة:



حيث إن النقطة  تقع بين  و .

* **إثبات منشور تايلور:[[11]](#footnote-11)**

إن استخدامنا لمنشور تايلور سيبقى ضمن الحدود السهلة و المعقولة. بل في الحقيقة إننا سنستخدم حالة خاصة من منشور تايلور تدعى صيغة ماك لوران. و هذه الصيغة تقتضي بأن يكون و بالتالي يصبح كل من تابعي كالآتي:







* وبالتالي و بعد ضرب التابع بالعدد i نلاحظ تساوي الصيغتين  .و ها قد تم الإثبات. و بما  هو تابع أسي فنلاحظ أنه من المنطقي القول أن التعامل معه يكون أسهل. كما يجب أن ننو ه إلى عدد من الملاحظات تخص هذه الصيغة:
* هذه الصيغة بشكل عام أتت من المجموعة  التي يرد تعريفها في ما يلي:

لنرمز بالرمز إلى مجموعة الأعداد العقدية التي طويلتها تساوي الواحد و زمرة جزئية من الزمرة الضربية و نتيقن بسهولة الخواص الآتية:

إذا كانت تنتمي إلى  فنحن نرمز بالرمز إلى العدد العقدي  الذي طويلته تساوي الواحد و ينتمي إلى U (مع العلم أننا قد أثبتنا سابقاً هذا الكلام). و بطريقة معاكسة ليكن Z عنصراً ما من U يحقق أن  لذلك لا بد من وجود عدد حقيقي ما θ يحقق أن  بحيث أن  أي أن  .

* إن  و ذلك من تعريف المرافق و معرفتنا أن .
* بما أن الصيغة السابقة هي صيغة أسية فعندما تكون الزاوية تساوي الصفر فإن  و ذلك من خواص التابع الأسي.
* من الملاحظات الجميلة حول صيغة هو أننا خلقنا نوعاً جديداً من طرق التحديد أو الإحداثيات و هي أن أحدد نقطة اعتماداً على طول قطعة مستقيمة و قياس زاوية حيث أن eiθ من جهة تحافظ على طويلة العدد لأن طويلتها تساوي الواحد و العملية هي ضرب و من جهة أخرى أضافت بعداً زاوياً للشعاع.
* دستورا Euler أياً كان العدد الحقيقي من  نجد التالي:
* البرهان:هذه الخاصة تطابق تماما خاصية القسم الخيالي و القسم الحقيقي التي كنا قد برهناها سابقاً.
* و مع العلم أنه توجد قواعد خاصة لجمع و ضرب هذه الصيغ و لن نكتبها ضمن هذه الملاحظات نظراً لأنها ستمر معنا في الفقرة التالية و لكن بشكل آخر و هو بدلاً من سوف يرد بالشكل  .كما أنه يجب أن نقول أن تابعي , هما تابعان دوريان دورهما هو  .
* **العمليات على الأعداد في الصيغة القطبية:**
* **الضرب:[[12]](#footnote-12)**
* ليكن عددان عقديان كالآتي  فإن جداءهما يعطى بالعلاقة التالية:  الإثبات:



* و تم الانتقال من الخطوة 2 إلى الخطوة 3 عن طريق متطابقة الجمع في النسب المثلثية و هي الآتية:

****

* `و من هذه العملية تبرز النتائج التالية:
* إن 
* إن  حيث أن k تأخذ القيم الآتية:

إذا كان و يمكن أن تأخذ القيمة 1 إذا كان و ذلك لكي تبقي الزاوية بتعيينها الأساسي.

* نجد أن 
* صيغة الضرب التي مرت معنا يمكن أن تمدد إلى الشكل الآتي: .
* **قوة عدد في الصيغة القطبية: دستور** DE MOIVRE:[[13]](#footnote-13)
* أياً كان من  وأياً كانت من  العلاقة التالية محققة:

 و يمكن إثبات العلاقة السابقة من خلال الاستقراء الرياضي و ها هو البرهان:

لنفرض أن و بالتالي نستطيع ملاحظة الأنماط الضربية الآتية:



* و الآن و حسب خطوات الاستقراء الرياضي نفرض صحة أن: و علينا أن نثبت أن:
* `نحصل على هذه العلاقة من ضرب المساواة التي نملكها بالأصل بالمقدار وبالتالي تتحقق عندنا المساواة:.و بقي علينا أن نثبت أن هذا الكلام صحيح عندما تكون أي أن نثبت أنه:

و بما أن هما تابعان زوجي و فردي على الترتيب فإن:



و تم الإثبات الكلي.

* **القسمة:**
* أياً كان العددان العقديان z1 , z2 حيث  نجد أن: .الإثبات:



* هنا أيضاً تم الانتقال من الخطوة الثانية إلى الخطوة الثالثة عن طريق متطابقات الطرح في النسب المثلثية:



* و من هذه العملية نستطيع استنتاج الخواص الآتية:

1. 
2. 
3. 
4. بقرض z=1 و ان z2=z نجد الآتي:

مع الملاحظة أن دستور DE MOIVRE يبقى محققاً حتى من أجل الأعداد السالبة.

التمثيل الهندسي للضرب و الجمع في الصيغة المثلثية:

لنمثل كل عدد عقدي بشعاع له طويلة محددة و له زاوية معينة فإن جداء هذين العددين العقديين يمثل بشعاع طويلته هي جداء الطويلتين و له زاوية تساوي جمع زاويتي الشعاعين السابقين و القسمة نتبع القاعدة التي ذكرناها قبلا.

**الفصل الثاني: الجذر النوني لعدد عقدي The nth root of a complex number:**

بما أن أي عدد عقدي يكتب بالشكل:

الجذر النوني يعطى النوني يعطى بالشكل:

نستنتج أن طويلة العدد الناتج ستكون ثابتة و هي الجذر النوني لطويلة العدد الأصلي أما زاويته فلها n قيمة مختلفة بينما تتراوح قيمة k بين الـ 0 وn-1 و تعود لتكرر خارج هذه القيم.

إذاً لكل عدد عقدي z مجموعة جذور تمثل هندسيا بمضلع منتظم مركزه مبدأ الإحداثيات, يمكن الحصول عليها بضرب الجذر الأول حيث k تساوي الـ 0 بجذور العدد واحد و تسمى جذور العدد واحد بجذور الوحدة ويرمز لها ب Un حيث n هي درجة الجذر.[[14]](#footnote-14)

**بعض الخواص لجذور الوحدة:**

* إذا كانت q تقسم n تكون :
* هذا يعني أن حيث k عدد صحيح .
* إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر ل n و m :
* نفرض
* و أن

نلاحظ أن إذا و فقط إذا تساوت زاويتهما ﻷن طويلة كل منهما هي 1.

أي أن:

نفرض d القاسم المشترك الأكبر ل m و n :

نستنتج أن تقسم p أي نكتب p بالشكل:

أي أن و هي زاوية عنصر ينتمي إلى Ud و بما أن طويلته تساوي ال 1

إذا:و بحسب الخاصة الأولى , من العلاقتين الآخرتين نستنتج الخاصة المطلوبة.

نعرف جذور الوحدة الأولية على أنها جذور للوحدة بحيث إذا رفعت ﻷي قوة اقل من n لا تساوي الواحد حيث n هي درجة الجذر.

* يكون جذرا أوليا إذا و فقط إذا تحققت المساواة: حيث k ,n أوليا فيما بينهما.

نفرض أن p هو أصغر عدد حيثفيكون: مما يعني:نفرض أن القاسم المشترك الأكبر ل k و n هو d فنحصل على:, نعوض فيما سبق لنحصل على :نستنتج أن تقسم p و بما أن p هو أصغر عدد يحقق العلاقة نستنتج أن لكن لكي يكون جذرا أوليا أن تتحقق المساواة من العلاقتين السابقتين أي اي أن m و k أوليان فيما بينهما.

* يمكن الحصول على المجموعة Un برفع أحد جذورها الأولية للقوى المختلفة من ال0 إلى ال n-1

نفرض جذرا أوليا و نفرض p و q عددان صحيحان أصغر من n حيث فنلاحظ أن:

أي أن

و نلاحظ أنه إذا كانت فإن ﻷن هذا يقتضي أن لكن مما يجعل العلاقة السابقة تناقض أن جذر وحدة.

مما يعني أنه برفعنا للقوى المختلفة من ال0 إلى n-1 نكون قد حصلنا على n عنصرا مختلفا ينتمون إلى Un المكونة من n عنصر بمعنى آخر نحصل على عناصر Un.

* مجموع عناصر Un يساوي الصفر:

من الخاصة السابقة يمكن تمثيل مجموع عناصر Un بالقوى المختلفة ل فيكون الجذور هو:

و منه نستنتج أن مجموع جذور أي عدد عقدي يساوي الصفر .

* إذا كان p عدد أولي فإن العلاقتين الآتيتين متكافئتين:

إذا تحققت العلاقة الثانية فالأولى حتماً محققة حسب الخاصة السابقة.

نفرض كثير الحدود في العلاقة الأولى هو و نفرض كثير الحدود نلاحظ وجود جذر مشترك بينهما هو و بما أن كثير الحدود لايمكن تحليله إذا لكن و من الدرجة ذاتها ينتج أن هو تابع من الدرجة 0 أي عدد حقيقي و بما أن أمثال قوى x متساوية ب ينتج .

**The nth\_cycolomotic polynomial:[[15]](#footnote-15)**

* نعرف التابع حيث :

وندعوهThe nth\_cycolomotic .polynomial

نلاحظ أن درجة كثير الحدود الناتج هي أي تابع أويلر.

يمكن كتابة التابع بشكل آخر:

: حيث

* بعض الخواص الأساسية:

1. إذا كان

إذا كان n غير ذلك

نأخذ الدالة المساعدة:

ملاحظة :بالصيغة السابقة يمكن مكان وذلك بقسمة البسط والمقام على حيث و m هو عدد قواسم n الأولية.

ملاحظة :

نناقش الحالة الأولى و بالتعويض بالصيغة السابقة و الملاحظات نحصل على :

أما الحالة الثانية : حيث و q هو جداء عوامل n الأولية.

1. إذا كان q عددا فرديا أكبر من ال 1 فإن :[[16]](#footnote-16)

لأنه إذا كان جذراً أولياً من من الدرجة q فإن - هز جذر أولي من الدرجة 2q و بما أن فإن عدد الجذور الأولية ل 2n يساوي عدد الجذور الأولية لـ n نستنتج أن الجذور مجموعة الجذور الأولية من الدرجة 2n هي ذاتها مجموعة معاكسات الجذور الأولية من الدرجة 2n .

و بما أن زوجي دائما نستنتج أن :

**تطبيقات بالهندسة المثلثية:**

*و بما أن حيث أي أن و بما أن :*

*نستنتج أن ناتج جداء الأعداد العقدية هو عدد حقيقي فإن جداءها يساوي جداء طويلاتها أي:*

.

حسب الخاصة السابقة:

* إذا لم يكن n قوة لعدد أولي.

نلاحظ أن :

و بما أن جداء هو عدد حقيقي موجب إذا جداء طويلاتها يساوي ذلك العدد.

=1.

* لأي عدد فردي موجب

نلاحظ أن :

كما نلاحظ أن :

*و منه تنتج الخاصة المطلوبة .*

*ملاحظة : مجموع الأعداد الأولية فيما بينها مع عدد و الأصغر منه هو :.*

* **الباب الثالث : الأعداد العقدية و الهندسة :**
* **الفصل الأول :بعض المفاهيم والخواص الأساسية:[[17]](#footnote-17)**
* ***المسافة بين نقطتين :***
* *إذا كان للعددين العقديان z1 و z2 يقابلان في المستوي النقطتين M1 و M2 تعطى المسافة بينهما بالعلاقة :*

*و نلاحظ أن متراجحة المثلث محققة حيث : حيث :*

* *ولا تتحقق المساواة إلا إذا وجد عدد k بحيث*
* ***وقوع نقطة في قطعة مستقيمة:***
* *إذا كانت النقطتان ِA و B لهما الإحداثيات a و b نقول أن النقطة M ذات الإحداثيات m تقع على القطعة المستقيمة AB إذا و فقط إذا : ويرمز لذلك بالرمز و هذا يكافئ:*

1. *بناءً عليه يوجد عدد حقيقي موجب k بحيث*
2. *يوجد عدد حقيقي T حيث يحقق:*

* ***وقوع نقطة على نصف مستقيم:***
* *إذا وقعت نقطة على المستقيم المار بالنقطتين A و B و من جهة النقطة B نرمز لذلك بالشكل: و هذا يكافئ:*

1. *يوجد عدد حقيقي موجب T بحيث*

* *الإثبات:*

*إذا كانت M بين A و Bفكما ذكرنا بالفقرة السابقة :*

* *و إلا فستقع B بين A و M و عنها حيث نفرض فنحصل على العلاقة الأولى .*

*من العلاقة الأولى نجد أن حيث Tعدد حقيقي و هذا يكافئ العلاقة الثانية.*

*و من العلاقة الثانية نحصل على الأولى حيث ناتج قسمة عددين لهما الزاوية ذاتها هو عدد حقيقي موجب.*

* ***وقوع نقطة على مستقيم:***

*إذا وقعت النقطة M على المستقيم المار بالنقطتين A و B فإن هذا يكافئ:*

1. *يوجد عدد حقيقي T حيث*

* ***الإثبات:***

*بتطبيق القوانين السابقة نستنتج أنه إذا كانت M من جهة Bإذاً و إذا كانت من جهة فإن .*

*و بما أن كما ناقشنا سابقا يوجد عدد حقيقي موجب يحقق العلاقة الثانية إذا كانت M من جهة B أما إذا كانت M جهة A القانون السابق ينتج و بتعويض نحصل على المطلوب.*

*بما أن إذاً : و هو يكافئ العلاقة الثالثة.*

*مفكوك المحدد بالعلاقة الرابعة هو معاكس مفكوك المحدد بالعلاقة الثالثة.*

* ***قسم قطعة مستقيمة بنسبة معلومة:***

لقسم القطعة المستقيمة AB بنسبة K فإن:

* ***قياس زاوية:***

*تكون الزاوية موجهة توجيهاً مباشراً إذا وضعت رؤوسها عكس عقارب الساعة و تكون موج هو توجيهاً غير مباشر إذا كانت رؤوسها مرتبة مع عقارب الساعة.*

*قياس الزاوية الموجهة توجيها مباشراً :*

* *قياس الزاوية الموجهة توجيهاً غير مباشر :*

قياس الزاوية يقاس بالقيام بعملية انسحاب بمقدار :

الزاوية بين المستقيم M2M1 و المستقيم M3M4 هي: أو

* ***الدوران بزاوية معلومة:***

*إحداثيات صورة وفق الدوران بالزاوية مركزه O مبدأ تعطر بالعلاقة :*

إذا كانت هي مبدأ الإحداثيات وقون بانسحاب بمقدار ثم دوران ثم انحساب بمقدار :

* ***الوقوع على استقامة واحدة و التعامد و الوقوع على دائرة واحدة:***

1. *تقع النقاط M1 ,M2 ,M3 على استقامة واحدة إذا وفقط إذا :*

*و ذلك لأن الزاوية*

1. *المستقيمان* M2M1 و M3M4 *متعامدان إذا و فقط إذا :*

*و ذلك لأن*

1. *تقع النقاط و و و على دائرة واحدة إذا و فقط إذا حيث :*

*و ذلك لأن الرباعي أو أي رباعي آخر فيه و متجاوران يكون دائري إذا و فقط إذا تساوت الزاويتين :*

*و في هذه الحالة يكون k عدد حقيقي موجب لأن :*

*و الرباعي أو أي رباعي آخر فيه و متقابلان يكون دائري إذا و فقط إذا:*

* *و هو يساوي و منه K عدد حقيق سالب.*

*ملاحظة: إذا كانت العلاقة السابقة محققة و كانت فإن النقاط الأربع تقع على استقامة واحدة .*

**الفصل الثاني: ((التشابه المباشر )):[[18]](#footnote-18)**

* **أولا : تعريف التشابه المباشر :**
* التشابه المباشر هر التحويل النقطي الذي يحافظ على نسب المسافات وقياسات الزوايا الموجهة ، أي إذا كان S تشابها مباشرا وكانت النقاط صور النقاط وفق S على الترتيب فإن وكذلك .
* **ثانيا : نسبة تشابه مباشر :**
* إذا كان  تشابها مباشرا، بالتالي فإنه من أجل كل نقط من المستوي بحيث صورها على الترتيب لدينا و منه و بالتالي النسبة تساوي عددا ثابتا  حيث عدد حقيقي موجب تماما . و منه .
* وبالتالي نستنتج أنه إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات بعدد حقيقي موجب تماما ،نسميه نسبة التشابه المباشر .

**ملاحظة :** إذا كان  نقول عن التشابه المباشر أنه تقايس موجب أو إزاحة أي انسحاب أو دوران.

* **ثالثا : زاوية التشابه المباشر :**
* إذا كان **** تشابه مباشر من المستوي فإن يحافظ على الزوايا الموجهة أي

، و منه الزاوية زاوية ثابتة

هذه الزاوية تسمى زاوية التشابه المباشر .

* **رابعاً : التعبير عن التشابه المباشر بالأعداد المركبة :**
* إذا كان S تشابها مباشرا فإننا نستطيع أن نعبر عن S بالكتابة المركبة من الشكل 

بحيث  و عددان مركبان و.

* **البرهان :**  هي نقطةإحداثياتها،  نقطة إحداثياتها  و  نقطة إحداثياتها 

 صور  على الترتيب وفق التشابه المباشر 

من  و  (مع )

* و منه نستنتج  و  و بالتالي



* بوضع  ( و بالتالي  و ) و  يمكن التأكيد

أن الصيغة المركبة لِـ  هي  مع العلم أن  .

* **المطلب الأول: خواص التشابه المباشر :**

**(1\_ تحويل نقطي كتابته المركبة من الشكل :**

**مع العلم أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس**

إذ كان S تحويل نقطي من الشكل  نقول أن S هو تشابه مباشر نسبته *.*

**البرهان:**

 ، ،، نقط كيفية من المستوي إحداثياتها  ، ، ، على الترتيب .

 ، ،، صور ، ،، على الترتيب بالتحويل  .

 ، ، ، إحداثيات ، ،، على الترتيب وبالتالي فإن :

 ، ، ، .



و منه و منه

بنفس الطريقة و بالتالي أي.

و منه يحافظ على نسب المسافات.

 بفرض  و لدينا  و منه

و منه  أي .

و منه يحافظ على الزوايا.

 يحافظ على نسب المسافات و يحافظ على الزوايا إذن  تشابه مباشر . وبما أن  فإن هي نسبة التشابه المباشر .

**وهناك بعض الحالات الخاصة ألا وهي :**

1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو  و هو من الشكل  مع  .

و نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1

2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو  حيث  عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن

و نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي  .

3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو حيث عدد مركب غير حقيقي

طويلته تساوي الواحد ، و زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي .

**المطلب الثاني: التركيب :**

**(1\_ تركيب تشابهين مباشرين :**

**مع العلم أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس**

حيث أنتركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين .

**البرهان:**  تشابه مباشر عبارته المركبة  حيث  و عددان مركبان و .

 تشابه مباشر عبارته المركبة  حيث  و عددان مركبان و .

 وصورتا  و على الترتيب بالتحويل  .

 وصورتا  و على الترتيب بالتحويل  .

إذن  وصورتا  و على الترتيب بالتحويل  .

 و . وبالتالي 

  و.

- و بالتالي أي.

إذن  تشابه مباشر نسبته وزاويته . و

* **المطلب الثالث :التحليل القانوني لتشابه مباشر :**

 تشابه مباشر نسبته  و زاويته   نميز الحالتين :

 إذا كان  و  التشابه  انسحاب .

 في الحالات الأخرى يكون S مركب انسحاب ودوران لهما نفس المبدأ ،أي بمعنى آخر أن يقبل S

نقطة ثابتة وحيدة Ω لاحقتها و ، حيث  هو التحاكي الذي مركزه 

و نسبته و  هو الدوران الذي مركزه  و زاويته .

* **البرهان:** تشابه مباشر كتابته المركبة  أي حيث وعددان مركبان و.

 و  معناه  و الكتابة المركبة تصبح  إذن  انسحاب شعاعه حيثصورة العدد المركب ( إذا كان زيادة على هذا  فإن  التحويل المطابق ).

 إذا كان :, . لتكن  نقطة ثابتة بالنسبة للتشابه  .

وبالتالي فإن يعني ومنه  إذن يقبل نقطة ثابتة وحيدة 

لاحقتها .

 التحاكي الذي مركزه  و نسبته كتابته المركبة .وبالتالي.

 الدوران الذي مركزه  وزاويته  كتابته المركبة . وبالتالي.

صورة بالتحاكي  وصورة بالدوران .إذنصورة بالدوران.

أي و

و بالتالي  أي.

و منه  صورة  بالتحويل وبالتالي . بنفس الطريقة نثبت أن  .

 تشابه مباشر مركزه  نسبته  و زاويته  .

* **ثالثاً :**

**(1\_تعيين تشابه مباشر:**

إذا كان  تشابها مباشرا مركزه  نسبته  و زاويته فإن :

  .

 من أجل كل نقطة  من المستوي تختلف عن 

 تعني 

**البرهان:** ليكن  التحاكي الذي مركزه  و نسبته و  الدوران الذي مركزه  و زاويته .

نعلم أن 

.

 لتكن  نقطة من المستوي تختلف عن  و  صورتها بالدوران  وصورة بالتحاكي



 يعني و منه  وبما أن فإن

.



يعني  و

من و نستنتج 

بما أن  و نستنتج أن  و متوازيان و لهما نفس الاتجاه ، و منه

.

**\_(2التشابه المباشر و نقط المستوي:**

إذا كانت  ، ،  و أربع نقط حيث وفإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول  إلى

 و يحول  إلى  .

* **البرهان:** ليكن تشابها مباشرا كتابته المركبة  بحيث ، ولتكن :

-  ، ، و لواحق  ، ،  و على الترتيب حيث و.

تعني أن (1)

*تعني أن*

ومنه فإن : أي

*وبالتالي فإن , نعوض في* (1) *فنجد*   *ومنه*

بما أن  فإن  و التشابه  وحيد*.*

**- نتائج:**هو التشابه المباشر الذي يحول  إلى  و يحول  إلى  .

 إذا كان  فإن  هو الانسحاب الذي شعاعه  لأن

وبالتالي فإن ومنه فإن S *هو انسحاب .*

 إذا كان فإن هو تشابه مباشر نسبته و زاويته  ، و مركزه النقطة الصامدة.

**3)- نظرية ألين كولينز:[[19]](#footnote-19)**

إذا اعتبرنا التحويلات في المستوي العقدي حيث مختلف عن الصفر . إذا كانت التحويلات و ليست انسحابات أي أن . إذا تكون القضيتين الآتيتين متكافئتين:

(1)

(2) *و حيث و هي النقاط الثابتة للتحويلات*  على الترتيب.

الإثبات :

*حيث هي النقاط الصامدة بالنسبة للتحويلات على الترتيب.*

إذا و فقط إذا و:

لإثبات أن (1) و (2) متكافئتين نثبت أن و مختلفين بثابت ضربي و بالاستفادة من العلاقة: نحصل على:

* **المطلب الرابع :المثلثات المتشابهة :[[20]](#footnote-20)**
* ***تشابه مثلثين لهما التوجيه ذاته:***

*يتشابه المثلثين A1 A2 A3 و B1 B2 B3 لهما التوجيه ذاته إذا و فقط إذا:*

*- لأن هذا يعني أن :*

* ***تشابه مثلثين لهما توجيهان متعاكسان :***
* *يتشابه المثلثين A1 A2 A3 و B1 B2 B3 لهما توجيهان متعاكسان إذا و فقط إذا:*

* حيث هذا يكافئ:

و أن:

* **المطلب الخامس: المثلثات المتساوية الأضلاع :[[21]](#footnote-21)**
* ليكن لدينا المثلث ولتكن إحداثيات الرؤوس على الترتيب

عندئذ يكون المثلث متساوي الأضلاع في الحالات التالية :[[22]](#footnote-22)

1)\_

(2\_

3)\_ =

(4\_ +

(5 \_

حيث

\_ نظرية (2):ليكن لدينا المثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي موجه بالاتجاه الموجب ،عندئذ يكون المثلث متساوي الأضلاع في الحالات التالية :

(1 \_ حيث

(2 حيث

3)\_  *حيث*

*- النظرية (3):* ليكن لدينا المثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي موجه بالاتجاه الموجب ،عندئذ يكون المثلث متساوي الأضلاع في الحالات التالية [[23]](#footnote-23):

1)\_ حيث

2*)\_* (2 حيث

3*)\_ حيث*

* *نظرية (4):* ليكن لدينا المثلث ولتكن إحداثيات الرؤوس على الترتيب يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا و فقط إذا تحققت أحد الحالات الآتية:

1. و

نأخذ طويلات الحدود في العلاقة الأولى فنحصل على :

هذا يكافئ:

مما يعني أن:

و و

بالعودة إلى العلاقة المعطاة نحصل على:

أي : , ,

و بجمع العلاقات السابقة نحصل على:

وبالتالي فالمثلث متساوي الأضلاع .

* **الفصل الثّالث: المعادلات الهندسيّة:**

**المطلب الأول: معادلة المستقيم:[[24]](#footnote-24)**

**1)\_المعادلة العامة لمستقيم :**

("1\_المعادلة العامة لمستقيم في المستوي العقدي تعطى بالشكل

**البرهان :** ليكن العدد المركب  مرافقه 

وبالتالي فإن : ,

نعلم أن الشكل العام لمعادلة مستقيم في المستوي الإقليدي هو

نعوض قيمتي في العلاقة السابقة فنحصل على

ليكن بالتالي تصبح المعادلة بالشكل

\_إذا كانت  *بالتالي فإن وبالتالي فإن المستقيم الممثل لهذه المعادلة عمودي. وإذا كان نستطيع أن نستنتج الميل الزاوي للمستقيم الممثل للمعادلة*

*وفق العلاقة :*

*\_وكذلك فإن الميل الزاوي العقدي للمستقيم الممثل لهذه المعادلة يعطى بالعلاقة :*

* *ليكن لدينا المستقيمان اللذان معادلتاهما :*

*يكون المستقيمان :*

(1*\_متوازيان إذا كان .[[25]](#footnote-25)*

* ***البرهان :*** *نعلم أنه يكون*  موازيا ل إذا وفقط إذا كان أي
* بتقسيم الطرفين على وتطبيق خاصية الطرب التقاطعي نحصل على
* ومنه فإن : أي  *.*

(2\_ متعامدان إذا وفقط إذا كان .

* **البرهان :** المستقيمان متعامدان إذا وفقط إذا كان أي

بما أن نقسم على فتصبح المعادلة بالشكل :

- أي :

* وبالتالي

(3- *متقاطعان* *إذا كان ، وعندها نستطيع أن نوجد نقطة تقاطعهما بأن نوجد الحل المشترك لجملة معادلتيهما .*

* ***البرهان :*** *نعلم أن المستقيمان يكونان متقاطعان إذا وفقط إذا كان ومنه نستطيع أن نستنتج أن ( من الاستنتاج في الحالة* (1)*).*

*النسبة تدعى الميل الزاوي العقدي للمستقيم الممثل للمعادلة*

**2)\_ معادلة مستقيم يمر من نقطتين :[[26]](#footnote-26)**

إذا كان المستقيم يمر من النقطتين في المستوي العقدي هما فإن المعادلة العامة لهذا المستقيم تعطى بالعلاقة :

**البرهان :** نعلم أن المعادلة العامة لمستقيم مار بالنقطتين

*في المستوي الإقليدي تعطى بالعلاقة*

*أي أن :*

*بقسمة الطرفين على تصبح المعادلة بالشكل :*

*بقسمة الطرفين على نحصل على :*

*ومنه :*

أي

*وعندئذ فإن الميل الزاوي العقدي للمستقيم المار من النقطتين يعطى بالعلاقة :*

***3)\_معادلة المستقيم المار من نقطة موازيا مستقيما آخر :[[27]](#footnote-27)***

*ليكن لدينا المستقيم والنقطة ،عندئذ يكون المستقيم الموازي للمستقيم والمار من النقطة هو المستقيم*

***البرهان :*** *في المستوي الإقليدي**نعلم أن المستقيم الموازي**ل والمار من النقطة*

*يعطى بالعلاقة :*

*باستخدام الأعداد العقدية تصبح المعادلة بالشكل :*

*نضرب الطرفين ب ونطبق خاصية الضرب التقاطعي فنحصل على :*

*أي :*

ومنه :

**4)\_ معادلة المستقيم المار من نقطة وعمودي على مستقيم آخر :[[28]](#footnote-28)**

*ليكن لدينا المستقيم والنقطة ،عندئذ يكون المستقيم العمودي على المستقيم والمار من النقطة هو المستقيم*

***البرهان :*** *في المستوي الإقليدي**نعلم أن المستقيم والمار من النقطة*

*يعطى بالعلاقة :*

*باستخدام الأعداد العقدية تصبح المعادلة بالشكل :*

*في المستوي الإقليدي**نعلم أن المستقيم الموازي**ل والمار من النقطة*

*يعطى بالعلاقة :*

*باستخدام الأعداد العقدية تصبح المعادلة بالشكل :*

*نضرب الطرفين ب ونطبق خاصية الضرب التقاطعي فنحصل على :*

*أي :*

ومنه :

**4)\_ مسقط نقطة على مستقيم :[[29]](#footnote-29)**

*ليكن لدينا المستقيم والنقطة ، عندئذ يكون* مسقط النقطة على المستقيم هو النقطة التي إحداثياتها :

**البرهان :** النقطة  *(مسقط النقطة على المستقيم تحقق معادلة المستقيم والمستقيم المار من والعمودي على فهي تمثل الحل المشترك لجملة المعادلتين الخطيتين:*

من المعادلة (1) نجد :

*نعوض في المعادلة* (2) *فنجد:*

ومن*ه :*

**5)\_ بعد نقطة عن مستقيم [[30]](#footnote-30):**

*ليكن لدينا المستقيم والنقطة ، بالتالي فإن بعد النقطة* عن المستقيم يعطى بالعلاقة :

**البرهان :** لتكن مسقط النقطة  *على المستقيم عندئذ يكون بعد النقطة عن المستقيم*

* **المطلب الثاني :((معادلة الدائرة ))[[31]](#footnote-31)**
* *تعطى معادلة الدائرة في المستوي العقدي بالعلاقة :*

*حيث ,*

* ***البرهان :*** *نعلم أن معادلة الدائرة في المستوي الإقليدي تعطى بالعلاقة :*

*حيث*

*بفرض لدينا العدد بحيث عندئذ يكون :*

بالتعويض في المعادلة (1) نجد

بفرض لدينا  *, عندئذ تصبح المعادلة بالشكل*

*وعندئذ يكون نصف قطر الدائرة :*

*ومنه*

نعوض قيمة في العلاقة

بفرض لدينا

وبالتالي فإن :

وبالتالي فإن معادلة الدائرة التي مركزها ونصف قطرها :

* **دائرة الوحدة :[[32]](#footnote-32)**
* إذا كانت الدائرة دائرة الوحدة بالتالي فإن مركزها هو مبدأ الإحداثيات أي ونصف قطرها  *، وبالتالي تصبح المعادلة بالشكل :*

*ومنه يمكننا استنتاج معادلة المستقيم القاطع لدائرة الوحدة في نقطتين والمستقيم المماس لهذه الدائرة :*

* ***أولا : معادلة المستقيم القاطع لدائرة الوحدة :***
* *لتكن لدينا الدائرة دائرة الوحدة معادلتها والنقطتان تقعان على هذه الدائرة ، وبالتالي فإن كل من هاتين النقطتين تحققان معادلة الدائرة أي :*

* *وبالتالي تكون معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين بالشكل :*
* *نقسم على :*
* *وبالتالي فإن الشكل العام لمعادلة المستقيم القاطع لدائرة الوحدة في نقطتين تعطى بالعلاقة :*

***ثانيا : معادلة المستقيم المماس لدائرة الوحدة :***

*نعلم أن معادلة المستقيم القاطع لدائرة الوحدة من الشكل*

*لتكن عندئذ تصبح المعادلة بالشكل :*

*نقسم الطرفين على فتصبح المعادلة بالشكل :*

*ومنه نستنتج أن الشكل العام لمعادلة المستقيم المماس لدائرة الوحدة هو :*

**\_ إيجاد مركز الدائرة المارة من رؤوس مثلث :**

ليكن لدينا المثلث والنقطة مركز الدائرة المارة برؤوسه ولتكن

إحداثيات الرؤوس

نعلم أن معادلة المستقيم المارة من النقطتين تعطى بالعلاقة :

وبالتالي فإن الميل الزاوي العقدي لهذا المستقيم يعطى بالعلاقة

لتكن لدينا النقطة ، وبالتالي فإن معادلة المستقيم المار من النقطة موازيا :

ليكن المستقيم هو المستقيم المار من النقطتين ( إحداثيات رأسي الضلع والنقطة هي منتصف الضلع وبالتالي تصبح معادلة المستقيم المار من منتصف الضلع عموديا على هذا الضلع

وبنفس الطريقة نجد أن معادلة المستقيم المار من منتصف الضلععموديا على هذا الضلع تعطى بالشكل

من نجد :

نعوض في المعادلة (2) فنجد :

أي :[(

وبالتالي فإن

* ***قوة نقطة بالنسبة للدائرة :[[33]](#footnote-33)***
* *ذلتكن لدينا النقطة والدائرة التي معادلتها :*

*حيث ,*

*- بالتالي قوة النقطة بالنسبة للدائرة تعطى بالعلاقة :*

**- البرهان :** لتكن النقطة مركز الدائرة ، قوة النقطة  *بالنسبة للدائرة التي نصف قطرها تعطى بالعلاقة :*

- وبالتالي

* **المحور الأصلي لدائرتين :[[34]](#footnote-34)**
* لتكن لدينا الدائرتان اللتان معادلتاهما :

حيث ,

* فالمحور الأصلي لهاتين الدائرتين هو موضع النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة للدائرتين
* أي بمعنى آخر : إذا كانت النقطة نقطة من لمحور الأصلي بالتالي فهي تحقق :
* **الزاوية بين دائرتين :[[35]](#footnote-35)**

الزاوية بين دائرتين لهما المعادلات:

حيث ,

* هي الزاوية التي رأسها نقطة مشتركة بين الدائرتين وضلعاها نصفي قطري الدائرتين الواصلين بين المركزين والنقطة المشتركة .
* لتكن هي الزاوية بين الدائرتين عندئذ فإن :
* **البرهان :** لتكن النقطة المشتركة بين الدائرتين **،**  , مركزي الدائرتين عندئذ فإن الزاوية بين هاتين الدائرتين هي  *,*

في المثلث لدينا :

* **الباب الرابع : المثلثات و الأعداد المركبة :**

**الفصل الأول :النظريات الأساسية :[[36]](#footnote-36)**

* النظرية الأولى:لنفترض أن النقاط A',B',C' تقع على الأضلاع BC,CA,AB للمثلث ABC حيث أن ِAA',BB',CC' تتقاطع في النقطة Q و ليكن لدينا النسب المعرفة على الشكل الآتي:

BA'/A'C=p/n , CB'/B'A=m/p , AC'/C'B=n/m

* و إذا كانت a,b,c هي إحداثيات النقاط A,B,C على الترتيب عندئذ تكون إحداثيات النقطة q :

q= (ma + nb +pc)/(m + n + p)

* الإثبات:
* إحداثيات النقاط A',B',C' هي في هذه الحالة a'=(nb + pc)/(n + p) , b'=(ma + pc)/(m + p)

c'=(ma + nb)/(m + n) (و قد نتجت لدينا هذه الصيغ من العلاقة الأولى التي تكافئ قولنا أن

(a' – b)/(c – a')=p/n و بالضرب التقاطعي و عزل النقاط المنشودة نحصل على الصيغ السابقة). و الآن لتكن لدينا النقطة Q التي لها الإحداثيات المذكورة سابقاً و لكي نكمل البرهان نثبت وقوع النقطة q ذات الإحداثيات السابقة على التشيفيانات الثلاثة AA',BB',CC' .

النقاط الثلاثة A,Q,A' تقع على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان (q - a)×(a – a') و هذا الكلام يكافئ:

[(ma + nb + pc)/(m + n + p) – a]×[(nb + pc)/(n + p) – a]= 0

و هنا بعد توحيد المقامات نلاحظ أن الصيغة السابقة أصبحت تكافئ التالي:

[nb + pc – (n + p)a]×[nb + pc – (n + p)a]=0 (و ذلك حسب خواص الجداء الخارجي).و بالتالي أثبتنا أن النقطة Q تقع في هذه الحالة على التشيفيان AA'. و بنفس الطريقة نثبت وقوع النقطة Q على التشيفيانين BB' و CC'.

**الفصل الثاني: النقاط الأساسية في المثلث:**

1. مركز ثقل المثلث: يرمز له بالرمز G و في هذه الحالة نلاحظ أن BA'=A'C , CB'=B'A , AC'=C'B و بالتالي فإن النسبة p/n=m/p=n/m=1 و هذا يعني أن m=n=p=1 و بالتعويض في معادلة إحداثيات النقطة Q نجد أن :

zG=(a + b +c )/3

1. نقطة تلاقي المنصفات في المثلث:لنفترض أن أطوال الأضلاع BC,CA,AB هي على الترتيب,β,γ α

وإذا كان Q=I الذي هو مركز الدائرة الماسة داخلاً لأضلاع المثلثABC و بتطبيق نظرية المنصف الداخلي نجد أن:

BA'/A'C=γ/β , CB'/BA'=α/γ , AC'/C'B=β/α

و منه نجد أن m=α , n=β , p=γ و بالتالي أصبحت لدينا إحداثيات النقطة I حسب العلاقة الأولى و ذلك بتعويض m , n , p:

zI=(αa + βb + γc)/(α + β +γ)

1. نقطة تلاقي الارتفاعات: نرمز لها بالرمز H.فإذا كان Q=H نقوم بالإثبات كما يأتي:

أولاً نلاحظ أن BA'/A'C=(AA'/A'C)/(AA'/B'C) و بالتالي نلاحظ أن :

BA'/A'C=tan C/tan B , CB'/B'A=tan A/tan C , AC'/C'B=tan B/tan A

* إذاً بالملاحظة نجد أن p=tan C , n=tan B ,m= tan A :

و إحداثيات نقطة تلاقي الارتفاعات هي :

ZH=[(tan A)α + (tan B)β + (tan C)γ]/ (tan A + tan B + tan C)

1. نقطة جيرجون (Gergonne point): يرمز لها بالرمز J و هي نقطة تقاطع التشيفيانات AA' , BB' , CC' عندما تكون كل من A', B' , C' هي نقاط تماس الدائرة الماسة داخلاً لأضلاع المثلث حيث A' , B' , C' تقع على الأضلاع BC ,CA , AB على الترتيب. عندئذ يكون:

BA'/A'C=[ 1/(s-γ)]/[1/(s-β)] , CB'/B'A=[1/(s-α)]/[1/(s-γ)] , AC'/C'B=[1/(s-β)]/[1/(s-α)]

و بالتالي إحداثيات هذه النقطة هي :

ZJ=(rαa + rβb + rγc)/(rα + rβ + rγ)

و هنا rα, rβ , rγ تمثل أنصاف أقطار الدوائر الماسة خارجاً لمثلث (و هي الدائرة الماسة لأحد أضلاع المثلث و امتداد الضلعين المجاورتين له) و طبعاً فإن:

rα=k/(s-α) , rβ=k/(s-β) ,rγ= k/(s-γ)

1. نقطة ليموانlemmoine point)):يرمز لها بالرمز k و هي نقطة تقاطع symmedians و(هي عبارة عن المنصفات معكوسة بالنسبة للمتوسطات) و من المبرهنة الأولى نجد أن:

BA'/A'C=γ2/β2 , CB'/B'A=α2/γ2 , AC'/C'B=β2/α2

وهذا يقتضي:

Zk=( α2a + β2b + γ2c )/(α2+β2+γ2)

1. نقطة ناجل (nagel point): و يرمز لها بالرمز N و هي في هذه الحالة نقطة تقاطع التشيفيانات AA' , BB' ,CC' حيث A' , B' , C' هي عبارة عن نقاط تماس الدوائر الماسة خارجاً لأضلاع المثلث ABC و بالتالي:

BA'/A'C=(s-γ)/(s-β) , CB'/B'A=(s-α)/(s-γ) , AC'/C'B=(s-β)/(s-α)

و بالتالي نستطيع إيجاد إحداثيات هذه النقطة:

ZN=[(s-α)a + (s-β)b + (s-γ)c]/(3s – α + β + γ)

و بالتالي يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

1. ZN=(1-α/s)a + (1-β/s)b +(1-γ/s)c
2. نقطة سبايكر : (spiecker point) يرمز لها بالرمز Gs وهي النقطة الواقعة في منتصف القطعة المستقيمة IN و تكون إحداثياتها :

ZGs=1/2(zI + zN)=[(β + γ)a + (γ + α)b + (α + β)c]4s

* و هذه النقطة تمثل مركز الدائرة الماسة داخلاً لأضلاع المثلث المتكون من وصل متوسطات أضلاع المثلث ABC.

الآن سوف نتعرف على دائرة التسع نقاط لليوناردو أويلر the nine point circle of euler)):

ليكن ABC مثلثاً و نختار مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث O هو مبدأ المستوي العقدي (ARGAND CAUCHY)و لتكن a ,b ,c هي إحداثيات النقاط A , B , C و لتكن النقاط A' , B' , C' هي منتصفات الأضلاع BC , CA , AB على الترتيب و لتكن النقاط A'' , B'' , C'' هي منتصف القطع المستقيمة AH , BH , CH و من الواضح أن إحداثيات النقاط السابقة هي كالتالي:

ZA1= 1/2(b + C)

ZB1= 1/2(c + a)

Zc1=1/2(a + b)

ZA''=a + 1/2(b + c)

ZB''= b + 1/2(c + a)

ZC''=c + 1/2(b + a)



ZA'=1/2[a + b + c – bcā /(R2)]

ZB'=1/2[ a + b + c - cab̄/(R2)]

ZC'=1/2[a + b +c - abc̄/(R2)]

و المبرهنة بشكل عام تنص على أنه في أي مثلث ABC النقاط A1 , B1, C1 , A', B', C', A'' , B'' . C'' كلها تقع على دائرة واحدة التي يكون مركزها هو منتصف القطعة المستقيمة OH حيث أن H هي نقطة تلاقي الارتفاعات و نصف قطرها طوله يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة الأولى.

**الإثبات:**

نثبت أن النقطة الواقعة في منتصف OH تبعد عن النقاط التسعة السابقة بعداً متساوياً. نرمز لمركز دائرة أويلر O9 . اعتماداً على فرضنا الأول نجد أن ZO9=(a + b +c)/2 (و ذلك من خلال قاعدة إحداثيات نقطة قابعة في وسط قطعة مستقيمة) و كما أنه لدينا |a| = |b| = |c| = R حيث ٌ R هو نصف قطر الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC.

لنلاحظ أن:

=|(a + b )/2 –(a + b +c)/2| = 1/2|a|= 1/2R |O9A­1=|ZA1 – zo9

O9B1=O9C1= 1/2R

و ذلك من خلال نفس الخطوات السابقة بتعويض كل نقطة بإحداثياتها و أخذ الطويلة.

O9A''=|ZA'' – ZO9| = |a + 1/2(b + c) – (a + b + c)1/2| = 1/2|a| =1\2R و نلاحظ أن O9B''=O9C''=1/2R. و المسافة O9A' تحسب كالآتي:

O9A'=|ZA' – ZO9|= |1/2(a + b +c - bcā/R2)- 1/2(a + b +c)|

=1/(2R2)|bcā| =1/(2R2)|ā|.|b|.|c|=R3/2R2=1/2R

و بطريقة مشابهة للسابقة نجد أن O9B'=O9C'=R/2. و بالتالي أصبحت لدينا كل النقاط السابقة تقع على بعد ثابت و متساوي من نقطة معينة و هي منتصف القطعة المستقيمة OH و التي أصبحت تمثل الآن مركز دائرة أويلر .

1. نقطة سبايكر : (spiecker point) يرمز لها بالرمز Gs وهي النقطة الواقعة في منتصف القطعة المستقيمة IN و تكون إحداثياتها :

ZGs=1/2(zI + zN)=[(β + γ)a + (γ + α)b + (α + β)c]4s و هذه النقطة تمثل مركز الدائرة الماسة داخلاً لأضلاع المثلث المتكون من وصل متوسطات أضلاع المثلث ABC.

* **الفصل الثالث : الثوابت الأساسية في المثلث:**

لنفترض وجود المثلث ABC الذي أطوال أضلاعه هي α , β , γ و نصف محيطه s=( α + β + γ)/2 و نصف قطر الدائرة الماسة داخلا لأضلاعه r و مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث R . الأعداد r , R , s كلها تسمى الثوابت الأساسية في المثلث ABC.النظرية الأولى: أطوال الأضلاعα , β , γ تمثل الجذور التكعيبية للمعادلة الآتية:

t3 – 2st2 + (s2 + r2 + 4Rr)t – 4sRr=0

* البرهان:

هنا نملك طريقتين لإثبات النظرية السابقة فإما نتوصل من أحد الجذور (و ليكن α في حالتنا) إلى بناء الهيكل العام لشكل هذه المعادلة السابقة. أو أن نثبت باستخدام علاقات فييتا علاقة الجذور بالمرافقات الموجودة في المعادلة.و الآن سوف نبرهن اعتماداً على الطريقة الأولى:

نحن نعلم أن:

α =2R.sinA=4R.sinA/2.cosA/2 (تم التوصل إلى النتيجة الأولى بمعرفتنا

بالخاصية القائلة 2R=α/sinA و تم الاختصار مع sinA فبقي طول الضلع. و النتيجة أو الخطوة الثانية أتت من معرفتنا بالعلاقة sin2x= 2sinx.cosx و هنا تو تطبيقها بشكل مباشر)

كما و نعلم أن:

s-α=r.cotan(A/2)=r.[cosA/2]/sin(A/2) (و هذا جاء من العلاقة r=(s-α)tan(A/2) و بتقسيم الطرفين على tan(A/2) نحصل على العلاقة المرجوة)

إذاً الآن نقوم مرة بضرب المقدارين السابقين معاً لنحصل على cos2(A/2) و نعزلها لوحدها و نحصل على قيمتها و مرة ثانية نقسمهما على بعضهما و نحصل على sin2(A/2) و نعزلها لوحدها و نحصل على قيمتها.و القيم تكون على الشكل الآتي:

Cos2(A/2)=α(s-α)/4Rr , sin2(A/2)=αr/[4R(s-α)]

ومن العلاقة الأساسية المعرفة sin2(A/2) + cos2(A/2) = 1 تصبح المعادلة الأساسية بعد نقل 1 إلى الطرف الأيسر و توحيد المقامات:

α3 – 2sα2 + (s2 + r2 + 4Rr)α – 4sRr= 0

أي انتقلنا من الجذر ووصلنا إلى المعادلة الأساسية معوضاً فيها بدلاً من t قيمة α مما يبرر أنه جذر. و بنفس الطريقة نبرهن أن كل منβ , γ هي أيضاً جذور للمعادلة السابقة.

و الآن حسب علاقات فييتا نجد أن:

α + β + γ=2s (1)

αβ + βγ +γα = s2 +r2 (2)

αβγ = 4srR (3)

و من البديهيات الناتجة عن العلاقات 1 , 2 , 3 العلاقات الآتية:في أي مثلث ABC يتحقق الآتي

α2 + β2 + γ2 = 2(s2 – r2 – 4Rr)

* البرهان: لدينا

α2 + β2 + γ2= (α + β + γ)2 –2(αβ + βγ +γα )=4s2 –2(s2 + r2 + 4Rr)=2s2 -2r2 -8Rr

* و العلاقة الثانية هي أن:

α3 + β3 + γ3 = 2s( s2 -3r2 – 6Rr)

البرهان :



* **الفصل الرابع: المسافات الأساسية في المثلث:[[37]](#footnote-37)**
* لنفترض أن مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC (الذي هو O) هو مبدأ المستوي العقدي و لتكن a , b , c هي إحداثيات الرؤوس A , B , C على الترتيب.
* و الآن سوف نعرف بمبرهنة جانبية بسيطة لتساعدنا على حساب جميع المسافات التي سوف نعرضها لاحقاً.

- المبرهنة : الجداء الحقيقي a.b , b.c , c.a تعطى بالعلاقات:

a.b = R2 – γ2/2 , b.c =R2 – α2/2 , a.c =R2 –β2/2

- الإثبات:اعتماداً على خواص الجداء الحقيقي نجد أن:

γ2=|a –b|2 =|a|2 + |b|2 -2a.b=2R2 – 2a.b و العلاقة السابقة نحصل عليها بعزل الجداء لوحده في طرف و تقسيم كل الأطراف على 2.

* و الآن سوف نقوم بتعريف رمز جديد يعرف باسم المجموع الحلقي cyclic sum)) الذي له الرمز الآتي:

 و الآن سوف نقدم مثالاً بسيطاً عما يمكن فعله باستخدام هذا الرمز:

 وبالتالي نلاحظ أن له أهمية عظمى في اختصار التراكيب الطويلة.

(1المسافة OI :نظرية أويلر: OI2 = R2 – 2Rr

* الإثبات:

إحداثيات المركز الداخلي تعطى بالعلاقة:

ZI  = αa/2s + βb/2s +γc/2s

* و يمكننا أن نكتب في هذه الحالة:

OI2 = |zI |2 =( αa/2s + βb/2s +γc/2s)( αa/2s + βb/2s +γc/2s)

OI2=( αa)2/4s2+(βb)2/4s2 (γc)2/4s2 + 2[(αβa.b)/4s2+(βγb.c)/4s2+(αγa.c)/4s2]

* و يمكننا كتابة الصيغة السابقة باستخدام المجموع الحلقي (cyclic sum) على الشكل الآتي:

= 1/4s2(α2 + β2 + γ2)R2 + 2/4s2 

* و باستخدام المبرهنة الجانبية الأولى نجد أن:

OI2=(α2 + β2 + γ2)R2/4s2 + 2/4s2

* و الآن نحن نعلم أن إشارة (sigma) بشكل عام و بكافة أنواعها يمكن نشرها و توزيعها جمعاً و ضرباً و هذا ما سنقوم به في الخطوة التالية حيث أننا سنحول( ( cyclic sigma إلى جداء اثنين (cyclic sigma) على الشكل الآتي:

OI2=(α2 + β2 + γ2)R2/4s2 + 2/4s2

* و ثم نسحب -1/2 عامل مشترك و ذلك حسب أحد خواص السيغما لتصبح الصيغة كالآتي:

 =(α2 + β2 + γ2)R2/4s2 + -1/4s2

* و بالملاحظة نجد أنه بإمكاننا أن نسحب R2 عامل مشترك و ال(cyclic sigma) و من الطرف الأول و بمعرفة القاعدة α2 + β2 + γ2= (α + β + γ)2 –2(αβ + βγ +γα )يمكننا كتابة المعادلة بالشكل:

OI2=(α + β + γ)2 R2/4s2 –

* و بنشر ال(cyclic sigma) نجد أن:

OI2=R2 – αβγ(α + β + γ)/4s2= R2 – αβγ/2s= R2 ‑ 2 αβγ/4k . K/s= R2 – 2Rr

* وتم الإثبات و ذلك اعتماداُ على الصيغ: R= αβγ/4K , r=K/s

حيث أن k هي مساحة المثلث ABC.

(2المسافة ON: إذا كانت N هي نقطة nagel في المثلث ABC فإن: ON= R -2r

* الإثبات: إحداثيات نقطة ناجل هي كالآتي:

zn=(1-α/s)a + (1-β/s)b + (1-γ/s)c

⇚ON2= | zn|2= zn. zn=R2

=R2

=R2

= R2

=

* و بعد نشر قيمتي السيغما الحلقية بين قوسين حصلنا على الناتج الآتي:

=

==

=

* حيث رمزنا للمقداربالرمز E.و الآن لا بد لنا من أن نوجد المقدار E لنستطيع برهنة النظرية السابقة:



* و هنا كما هو ملاحظ لقد تمت كتابة الحدود الناتجة عن النشر باستخدام المجموع الحلقي بدلالة α حيث أنه من تعريف المجموع الحلقي لا فرق بالحد الذي يكتب بدلالته فالنتيجة كلها واحدة. و الآن نكمل بنشر المجموع الحلقي و تعويض E في العلاقة الرئيسية.

E=

ON2=R2-E= R2 -4Rr +4r2=(R-2r)2

* و بالتالي العلاقة السابقة محققة. و نستنج أن OI2=ON.R
* نظرية فيورباخ:(Feurebach) في أي مثلث ABC الدائرة الماسة داخلاً لأضلاع هذا المثلث و دائرة أويلر متماستان.
* الإثبات : اعتماداً على الشكل السابق الذي يصف توزع النقاط الأساسية في المثلث نجد أن:



* إذاً المثلثان GIO9 و GNO متشابهان. و هذا يعني أن IO9 و ON متوازيان و ON/2 IO9= و بتطبيق النظرية التي برهناها سابقاً نجد أن IO9=(R-2r)/2=R/2 –r=R9-r إذاً الدائرتان السابقتان متماستان.
* و نقطة تماسهما تسمى نقطة فيورباخ (Feuerbach) و يرمز لها بالرمز φ.

(3- المسافة OH:

* إذا كانت النقطة H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلثABC فإن:

OH=9R2 + 2r2 + 8rR – 2s2

* الإثبات: لنفرض أن مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC الذي هو O لنفرض أنه مركز المستوي العقدي.و تكون إحداثيات H :

ZH=a + b +c

* إذاً يمكننا القول أن:

OH2=|ZH|2=ZH.ZH=(a+b+c).(a+b+c)=



* و نلاحظ أن العلاقات التالية محققة:

(OG)2=R2 +2/9r2 + 8/9Rr- 2/9s2

OO9)2=9/4 R2 + r2/2 + 2Rr – s2/2)

* الإثبات: نحن نعلم أن OG=OH/3 و بتربيع الطرفين و تعويض قيمة OH2 في العلاقة نحصل على المطلوب.

و نحن نعلم أن OO9=OH/2 بتربيع الطرفين و تعويض قيمة OH2 في العلاقة نحصل على المطلوب.

* **الفصل الخامس : الجداءين الحقيقي و العقدي لعددين عقديين**

**المطلب الأول: الجداء الحقيقي:**

الجداء الحقيقي لعددين يعطى بالعلاقة :

وبالتالي فإن :

وبالتالي فإن العدد حقيقي لأن

وها هي بعض النظريات الأساسية بالنسبة للجداء الحقيقي :

النظرية(1): من أجل أي أربع أعداد عقدية العلاقات التالية محققة :

1)\_

2)\_ (أي أن الجداء الحقيقي تبديلي)

3)\_ أي الجداء الحقيقي توزيعي على الجمع

4)\_ حيث

5)\_ إذا وفقط إذا كان عمودي على

.

* ملاحظة: لنفترض ان A ,B هي النقاط ذات الإحداثيات a , b إذاً الجداء الحقيقي لa , b يمثل قوة مبدأ المستوي العقدي بالنسبة للدائرة التي قطرها هو AB.

الإثبات:لتكن M هي النقطة ذات الإحداثيات إذاً هذه النقطة تمثل مركز الدائرة و ليكن  هو نصف قطر هذه الدائرة فقوة المبدأ بالنسبة للدائرة السابقة هي حسب العلاقة:

النظرية (2) :لنفترض أن النقاط A , B , C لها الإحداثيات التالية a , b ,c العلاقات التالية محققة و متكافئة:

1. 
2. (b-a)(c-d)=0
3. 

الإثبات:بأخذ النقاط  حيث أن كل من *OABM , OCDN* هما متوازيا أضلاع عندئذ يكون  إذا و فقط إذا كان  الذي يعني أن *m.n=0* و بالتالي  و التكافؤ 2 يقتضي 3 من تعريف الجداء الحقيقي

النظرية ((3 :إذا كان مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث هو مركز الإحداثيات وكانت إحداثيات الرؤوس على الترتيب إذاً نقطة تلاقي الارتفاعات إحداثياتها تعطى بالعلاقة .

الإثبات : باستخدام الجداء الحقيقي للأعداد العقدية، فإن معادلات الارتفاعات

للمثلث تعطى بالعلاقة :

نثبت أن النقطة تقع على المستقيمات الثلاثة .

إذا و فقط إذا كانت و الأخيرة تكافئ أن إذا و بالطريقة ذاتها و

**المطلب الثاني: الجداء العقدي:**

نعرف الجداء العقدي لعددين عقديين بأنه

بعض الخواص:

1. إذا و فقط إذا تحققت إذا كانت أو أو حيث k عدد حقيقي
2. الجداء الحقيقي توزيعي على الضرب
3. أيا كان α عدد حقيقي
4. إذا كانت A(a) وB(b) نقتطين مختلفتين عن المبدأ إذاإذا و فقط إذا كانت النقاط A و B و O واقعة على استقامة واحدة
5. إذا كانت النقطتين A(a) وB(b) نقطتان في المستوي مختلفتان عن المبدأ فإن الجداء العقدي يحقق الخاصة الآتية:

نعلم أنه إذا كان المثلث موجه بالاتجاه الموجب فإن :

مساحة

وبالتالي فإن :

وإذا كان موجها بالاتجاه السالب فإن :

*ليكن لدينا المثلث بالتالي فإن :*

إذا كان المثلث موجه بالاتجاه الموجب .

وإذا كان المثلث موجه بالاتجاه السالب فإن :

وبشكل عام فإن مساحة المثلث تعطى بالعلاقة

***البرهان :*** *ليكن لدينا مثلث في المستوي العقدي ، نقوم بسحب النقاط بمقدار ، فتكون صورها وفق الانسحاب السابق هي التي إحداثياتها :*

*وبالتالي فالمثلثان طبوقين ولهما نفس الاتجاه .*

*إذا كان المثلث موجه بالاتجاه الموجب فإن :*

*وبنفس الطريقة نثبت الحالة الثانية2*) *)*

**المطلب الثالث:مساحة مضلع محدب:**

*ليكن لدينا المضلع المحدب رؤوسه عندئذ فإن :*

*حيث هي مساحة المضلع* .

***البرهان :*** *لنثبت هذه القضية بالاستقراء الرياضي .*

*أولا : نثبت صحة القضية من أجل قيمة ابتدائية* =3 *أي أن نثبت صحة هذه العلاقة في المثلث وهذا ما تم إثباته من خلال الجداء الخارجي في الفقرة السابقة .*

*ثانيا : نفرض صحة القضية من أجل قيمة .*

*ثالثا : نثبت صحتها من أجل قيمة :*

*بما أن :* =

*ويذلك يتم المطلوب .*

*طريقة ثانية : لتكن النقطة نقطة داخل المضلع ، عندئذ سب قانون مساحة المثلث نجد :*

**الباب الخامس: التطبيق العملي المسائل:**

**((المتراجحات الهندسية ))**[[38]](#footnote-38)

**المتراجحة (1)*:***

*لتكن*  نقطة كيفية في مستوي المثلث عندئذ:

*حيثأطوال أضلاع المثلث*

*الحل :*

*لنفرض أن النقطة هي مبدأ الإحداثيات و هي إحداثيات النقاط على الترتيب من الخاصة الجبرية التالية :*

*وبالتالي فإن| |*

وحسب متراجحة المثلث فإن :

*|*

*وبالتالي فإن :*

*مع العلم أن :*

*وأن*

*نعوض في العلاقة (2)*

*بتوحيد المقامات:*

هذا يؤدي:

*وهو المطلوب.*

*ملاحظات :*

*1)- إذا كانت مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث نستطيع أن نستنتج متراجحة أويلر :*

*في حال كانت مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث يكون*

*وتصبح المتراجحة السابقة بالشكل :*

وبالتالي فإن :=

وبالتالي فإن

حيث هونصف محيط المثلث ومساحة المثلث  *و هو نصف قطر الدائرة الماسة داخلا لأضلاع المثلث و هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس ذلك المثلث .*

*إذا كانت مركز ثقل المثلث نستنتج المتراجحة التالية :*

*بالنسبة للمتوسطات*

*وتتحقق المساواة فقط عندما يكون المثلث متساوي الأضلاع .*

**((متراجحة 2)):**

*أثبت صحة المتراجحة التالية :*

*لتكن النقطة نقطة اختيارية في مستوي المثلث عندئذ فإن :*

*الحل : لنفرض أن النقطة مبدأ الإحداثيات و هي إحداثيات رؤوس المثلث وبالتالي فإن :*

*بتوحيد المقامات نجد :*

*ومنه* *فإن :*

|1|=

مع العلم أن

وبالتالي فإن +

وهو المطلوب .

ملاحظات :

إذا كانت هي مركز ثقل المثلث :

نعلم أن طول المتوسط في المثلث في المثلث يعطى بالعلاقة

*ومنه*

وبنفس الطريقة نجد

وبالتالي تصبح المتراجحة السابقة بالشكل :

إذا كانت مركز الدائرة الماسة داخلا للمثلث بالتالي فإن :

وبالتالي نحصل على المساواة في المتراجحة2))

* **((المتراجحة3 )) :**
* لتكن نقطة اختيارية في مستوي المثلث بالتالي :

حيث مركز ثقل المثلث .

الحل : نعلم بأنه من أجل أي ثلاث أعداد عقدية العلاقة التالية محققة

بأخذ الطويلة نجد :

ونعلم أن

وبالتالي فإن

لتكن إحداثيات النقاط على الترتيب

لنفرض أن

ونعوض في المتراجحة (3) فنحصل على :

بالتالي فإن

مع العلم أن

=|

=|

=|

**المتراجحة الرابعة: متراجحة بطليموس (Ptolemy’s inequality):[[39]](#footnote-39)**

إذا كان ABCD رباعي فإن:

و تتحقق المساواة إذا كان الرباعي دائري أو وقعت النقاط على استقامة واحدة.

**الإثبات عقدياً:**

إذا كانت a,b,c,d أعداد عقدية تمثيلها بالمستوي هو A,B,C,D على الترتيب نلاحظ أن:

وحسب متراجحة المثلث:

و تتحقق المساواة إذا كان و هذا محقق بإحدى الحالتين إما النقاط الأربع على استقامة واحدة أو الرباعي دائري.

**B**

**C**

**X**

**E**

**β**

**α**

**A**

**Y**

**α**

**β**

**D**

صورة 2

**الإثبات إقليدياً:**

نرسم من A قطعة مستقيمة تقطع BD في X و من B قطعة مستقيمة تقطع AC في Y

**B**

**C**

**A**

**Y**

**X**

**E**

**α**

**α**

**β**

**β**

بحيث: و.

نفرض أن نقطة تقاطع AX و BY هي E نلاحظ أن المثلثان AEB و ACD متشابهان لتساوي زاويتين من الأول مع مقابلاتها في الثاني.

و منه: أي

و المثلثان AED و ABC متشابهان لأن: ومن التشابه السابق لدينا: .

و منه: أي

من (2) و(1) نجد:

**المسائل التي تحل باستخدام المتراجحات السابقة**:

**المسألة الأولى:**

لتكن مركز ثقل المثلث ولتكن  *أنصاف أقطار الدوائر المارة بالمثلثات*

*على الترتيب ، عندئذ حيث هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث .*

*الحل : في المتراجحة*

*(حيث أطوال أضلاع المثلث و نقطة تقع في مستوي المثلث ) ، لتكن النقطة مركز ثقل المثلث هي النقطة بالتالي*

*لكن :*

*وبنفس الطريقة نجد*

*وبالتالي تصبح العلاقة بالشكل*

*و بالتالي :*

**المسألة الثانية:**

*ليكن المثلث مثلث حاد الزوايا ،ولتكن النقطة نقطة تقع داخله ،أثبت أن*

*إذا وفقط إذا كانت نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلث .*

*الحل : لتكن النقطة مركز الإحداثيات و إحداثيات النقاط على الترتيب ، وبالتالي فإن العلاقة المعطاة في السؤال مساوية ل:*

ليكن :

بالتالي فإن :

*سنثبت أن هي نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلث إذا وفقط إذا كانت ثلاث أعداد حقيقية موجبة . بما أن المثلث حاد الزوايا وفيه نقطة تلاقي الارتفاعات فإن تقع داخل المثلث وكذلك هناك أعداد حقيقية موجبة تحقق:*

*أي أن عمودي على بزاوية درجة*

*أي أن عمودي على بزاوية درجة*

*أي أن عمودي عل بزاوية درجة*

*أي أن عمودي على بزاوية درجة*

*وبالتالي نجد :*

*فالأعداد حقيقية موجبة*

*أو بالعكس : لنفرض أن الأعداد أعداد صحيحة موجبة*

*بما أن :*

وبنفس الطريقة نجد :

وبالتالي فإن ثلاث أعداد خيالية تماماً وبالتالي فإن يعامد

وكذلك يعامد وبالتالي فإن نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث .

**المسألة الثالثة*:***

*ليكن مثلث والنقطة تقع داخله وليكن أنصاف أقطار الدوائر المارة برؤوس المثلثات على الترتيب ، الخطوط*  تقسم الأضلاع في النقاط على الترتيب ، ولتكن لدينا النسب :

أثبت أن :

حيث هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث

الحل :لاحظ أن

*لكن*

*وتصبح العلاقة الموجودة في الفرض*

*أي :*

*وبالتالي :*

*و بما أن المتراجحة السابقة محققة من أجل أي نقطة في مستوي المثلث فالعلاقة (\*) صحيحة .*

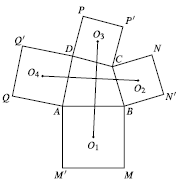
**((المسائل الهندسية ))**

**المسألة الأولى :((مبرهنة أوبل)):**

على الأضلاع لرباعي نشئ خارجيا المربعات التي مراكزه, , على الترتيب ،أثبت أن وأن و متعامدان.

**الإثبات :** لتكن المربعات هي المربعات المنشأة التي مراكزها ,, , على الترتيب ،لنرمز

لكل من النقاط المعطاة بحروف كبيرة ولإحداثياتها بحروف صغيرة، نلاحظ

******أن النقطة M ناتجة عن دوران النقطة A حول B بزاوية ومنه وبنفس الطريقة نجد

صورة3

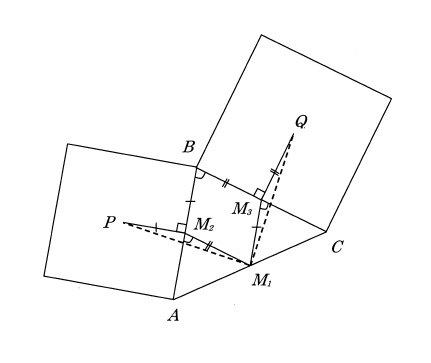
وبالتالي فإن = =

*ومنه فإن يعامد وكذلك نجد :*

* *|*

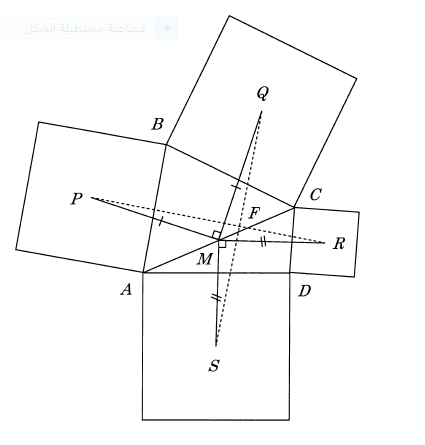
**بينما إثباتها الإقليدي**

لنفرض أن منتصف الضلع AC هي النقطة  و منتصف الضلع AB هي النقطة  و منتصف الضلع BC هي النقطة  .ونلاحظ أن  و إن و إن  و إذا قمنا بسحب  إلى (حيث أن طول يساوي طول و هما متوازيان )و ذلك لأن القطعة المستقيمة  هي واصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث فهي توازي الضلع الثالثة و تساوي نصفها)و نقوم على غرار ذلك بسحب  إللى  إذاً المثلث  و المثلث  متطابقان حيث أن لهما ضلعان متساويان في الطول و الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين هي تساوي (مع العلم أن الشكل  هو متوازي أضلاع )و بالتالي نستطيع أن نستنتج من التطابق أن  و هما متعامدان لأن الزاوية  تساوي



صورة 5

صورة 4

 من كون الشكل هو متوازي أضلاع و الزوايا المجاورة لها هي 



هذه هي العملية و الخطوة الأولى من عملية الإثبات التي تعتمد على الصورة الثالثة و الآن نقول: من رباعي عشوائي لا على التعيين ننشئ AC و نحدد M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة AC إذاً من أحل أول مربعين نجد أن:

 (هذا من الخطوة الأولى في هذه المبرهنة و نجد أنه من أجل المربعين الباقيين:

 و الآن لنتأمل كل من المثلثين  يما أننا نحد أنه يوجد ضلعان متقابلان متساويان و كلاهما لهما زاوية داخلية محصورة ما بين هذين الضلعين قياسها هو  و بالتالي هما متطابقان. و من التطابق ينتج أن PR=QS و أنهما متعامدان لأنهما دارا 90 درجة حول النقطة M . و تم الإثبات

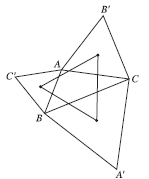
**المسألة الثانية : مثلثات نابليون**[[40]](#footnote-40)**:**

*على أضلاع المثلث ننشئ خارجياً ثلاث مثلثات متساوية الأضلاع موجهة بالاتجاه الموجب وهي أثبت أن مركز ثقل هذه المثلثات هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .*

*الحل : لتكن إحداثيات الرؤوس على الترتيب ،*

*بما أن المثلثات كل منها متساوي الأضلاع فالعلاقات التالية محققة :*

1 *)-في المثلث :*

2*)- في المثلث*

3*)-في المثلث*

صورة 6

*حيث* =+

حيث إحداثيات النقاط

مراكز ثقل المثلثات إحداثياتها:

+

**إثبات المبرهنة إقليدياً :**

في المثلث ليكن

ولتكن  *مراكز ثقل المثلثات وأيضا*

*سنثبت بأن أضلاع المثلث متساوية بالطول .*

*بما أن المثلثات المنشأة على أضلاع المثلث متساوية الأضلاع فإن :*

*وبما أن كل من المثلثين*  متساوي الساقين لأن :

ومنه فإن :

وبالتالي فإن :

وحسب قانون ال في المثلث فإن :

حيث

والآن لنوجد بدلالة قاعدة المثلث المتساوي الأضلاع الذي مركز ثقله

ولذلك

وبنفس الطريقة نجد

ولدينا

ونعلم أنه :

نعوض في (1) فنجد :

حسب قانون ال في المثلث لدينا :

مساحة

بما أن بما أن الارتفاع :

مساحة

نعوض (2) و(3) في (2') :

نكرر الأمر نفسه بالنسبة ل فنحصل على نفس النتيجة أي أن :

ومنه فإن :

أي أن المثلث متساوي الأضلاع .

وبذلك يتم المطلوب .

**المسألة الثالثة:**

الرباعي  *،* قطراه يتقاطعان في النقطة  *فيقسمانه إلى أربع مثلثات ، ولتكن مراكز ثقل المثلثين و نقطتي تلاقي الارتفاعات في المثلثين على الترتيب ، أثبت أن و متعامدان .*

*الحل :أولا : إذا كان لدينا مثلث*  فيه  *نقطة تلاقي الارتفاعات دعونا نحسب طول*

*لدينا*

*وحسب قانون ال في المثلث :*

*وبالتالي*

*في الرباعي لنفرض أن نقطة تلاقي الأقطار هي مركز الإحداثيات ،وبالتالي فإن*

*ومنه فإن*

*لدينا :*

وبما أن

نجد أن

*ومنه*

وبالتالي فإن ناتج عن  *بدوران بزاوية ومنه فإن و متعامدان.*

**المسألة الرابعة: قانون نيوتن :**

*أثبت أن منتصفات أقطار الرباعي ومركز الدائرة الماسة لأضلاعه داخلا على استقامة واحدة .*

***الحل:*** *نفرض أن الدائرة الماسة داخلا لأضلاع الرباعي*

*هي دائرة الوحدة ومركزها مبدأ الإحداثيات*



*C*

*بالتالي فإن معادلتها من الشكل*

*ولتكن نقاط تماس*

*الأضلاع*

*مع الدائرة ، ولتكن إحداثيات رؤوس*

*الرباعي .*

صورة7

*لنوجد معادلات المستقيمات الماسة للدائرة*

*في النقاط*

*على الترتيب*

*.(*1*)*

نريد أن نوجد إحداثيات النقطة نقطة تقاطع المستقيمين وذلك من خلال إيجاد الحل المشترك لجملة معادلتيهما

من *(*1*) نجد :*

*نعوض في :*

*ومنه فإن :*

*وبما أن النقطتين تقعان على دائرة الوحدة بالتالي فإن :*

*بنفس الطريقة نجد :*

*نوجد إحداثيات منتصفات الأقطار :*

*وبالتالي فإن*

*وبما أن النقاط تقع على دائرة الوحدة بالتالي فإن :*

*بالتالي فإن :*

بما أن بالتالي فالنقاط تقع على استقامة واحدة .

وبذلك يتم المطلوب .

**المسألة الخامسة: قانون باسكال :**

إذا كان لدينا سداسي مرسوم في دائرة فإن نقاط تقاطع امتدادات الأضلاع المتقابلة فيه تقع على استقامة واحدة .

**البرهان :** ليكن لدينا السداسي والدائرة الدائرة المارة من رؤوسه ، نفرض أن الدائرة دائرة الوحدة ( مركز الدائرة هو محور الإحداثيات ) و هي إحداثيات الرؤوس .

وكذلك



نوجد معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين :

معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين:

معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين :

معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين :

معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين :

معادلة المستقيم القاطع للدائرة في النقطتين :

بما أن هي نقطة تقاطع المستقيمين فهي تحقق كلا معادلتيهما أي :

من نجد

نعوض في

صورة 8



وبنفس الطريقة نجد :

وكذلك

ومنه

ومنه فإن :

بما أن النقاط تقع على دائرة الوحدة فإن :

وبالتالي فإن :

**المسألة السادسة:خط أويلر :**

أثبت أنه في أي مثلث O , G , H تقع على استقامة واحدة.

الحل:لنفرض أن O الذي هو مركز الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC هو مبدأ المستوي العقدي و عليه تكون إحداثيات النقاط كما يأتي: zG=(a + b + c)/3 , zH=a + b +c و بالتالي فإن هذه النقاط تقع على استقامة واحدة حسب الجداء الخارجي التالي: (zG – zo)×( zH - zo) و بالتالي:

  إذاً حسب خواص الجداء الخارجي نجد أن O , H , G كلها تقع على استقامة واحدة.

**المسألة السابعة: خط ناجل:**

أثبت أنه في أي مثلث I , G , N كلها تقع على استقامة واحدة.

الحل :

لدينا zN=(1-α/s)a + (1-β/s)b +(1-γ/s)c

zI=(αa + βb + γc)/(α + β +γ)

zG=(a + b +c )/3

و يمكننا أن نكتب: 

و الآن و باستخدام الجداء الخارجي نجد أن:



و بالتالي و حسب خواص الجداء الخارجي نجد أنه في أي مثلث I , G , N كلها تقع على استقامة واحدة.

**المسألة الثامنة:**

ليكن ABCD رباعي دائري و لتكن Ea , Eb , Ec , Ed هي مراكز دوائر أويلر المارة من رؤوس المثلثات BCD , CDA , DAB , ABC على الترتيب. أثبت أن المستقيمات

 كلها تتقاطع في نقطة واحدة.

الحل:

لنفرض مبدأ المستوي العقدي هو مركز الدائرة من رؤوس الرباعي ABCD عندئذ تكون إحداثيات النقاط على الشكل الآتي:

ea=(b + c + d)/2 , eb=(c + d + a)/2 , ec=(d + a + b)/2 , ed=(b + a + c)/2

 و لدينا أن :z=ka + (1-k)ea حيث أن z هي إحداثيات النقطة الواقعة على المستقيم AEa و a و ea هي إحداثيات طرفي القطعة المستقيم AEa و حيث أن k∈(0, 1). و بإيجاد معادلات باقي المستقيمات نلاحظ أنه توجد نقطة محددة و هي لها الإحداثيات (a + b + c + d)/3 تقع على المستقيمات الأربعة معاً و ها قد تم الإثبات.

**المسألة التاسعة: (نظرية تشيفا):**

عندما تتلاقى التشيفيانات في نقطة واحدة تكون جداءات النسب الآتية تساوي الواحد :

*CD/DB . BF/FA .AE /EC=1*

يمكننا إثبات نظرية تشيفا حسب المساحات كالآتي:

أولاً نعرف المبرهنة الآتية: لتكن M1, M2, M3ثلاث نقاط توجد على أضلاع المثلث ABC و لتكن هذه النقاط تقسم الأضلاع CA , AB , BC إلى النسب الآتية    إذاً نجد أن إحداثيات النقاط

M1, M2, M3 هي كالتالي M1=(c -a)/1- , M2=(a-b)/1- , M3=(b-a)/1-

إذاً مساحة المثلث M1M2M3 بدلالة مساحة المثلث ABC:





و الآن و بعد القيام بعدد من عمليات التحليل و تجميع الحدود حصلنا على الشكل الآتي:



و بالتالي نستنتج هنا أن مبرهنة تشيفا تكون محققة في حال كانت هذه النسبة تساوي الصفر لأنه في حالة تشيفا يكون=1.

**المسألة العاشرة : خط سيمسون :**

أياً تكن A , B , C ثلاثة نقاط تقع على دائرة ما فإن جميع العواميد من نقطة عشوائية تقع على هذه الدائرة على أضلاع المثلث ABCتعطي نقاط تقاطع تقع على استقامة واحدة.

**الحل:** لنفرض أن دائرة الوحدة هي الدائرة المارة من رؤوس المثلث ABC و إذا كانت النقاط A1 , B1 , C1 هي نقاط تقاطع الأعمدة مع الأضلاع فإن إحداثياتها تكون على الشكل الآتي:



و الآن يجب علينا أن نثبت أن: 

* و بالملاحظة نجد أن:



**المسألة الحادية عشر :نظرية بروكارد:**

ليكن ABCD هو رباعي موجود داخل دائرة. المستقيمان AB ,CD يتقاطعان في النقطة E و المستقيمان AD , BC يتقاطعان في F و المستقيمان AC , BD يتقاطعان في G أثبت أن O هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث EFG. **الحل:**

لنفرض أن الدائرة المارة من رؤوس الرباعي السابق هي دائرة الوحدة وبالتالي:



ذلك من خلال معادلة تقاطع وترين في دائرة.

لنثبت أن o التي إحداثياتها تساوي الصفر هي نقطة تلاقي الارتفاعات يجب أن نثبت أن  و بسبب التناظر الحاصل هنا يكفي أن نثبت أحد الصيغتين و بالتالي يكفي أن نثبت أن:  و بذلك لدينا:

 وقد حصلنا على هذه الصيغة من خلال التعويض بالمرافقات حيث أنه من فرضنا القائل أن دائرة الوحدة هي المارة من رؤوس الرباعي نجد أن مرافق كل عدد في هذه الحالة هو مقلوبه وبالتعويض نحصل على الصيغة :  

 و بالتالي و بقسمة الحدود على بعضها نلاحظ أن وبالتالي تم الإثبات.

**المسألة الثانية عشر(مسألةIMO لعام (1977:**

لننشئ المثلثات المتساوية الأضلاع DAN,CDM,BCL,ABK داخل المربع ABCD.أثبت أن منتصفات القطع المستقيمة NK , MN , LM , KL و منتصفات القطع المستقيمة AN , DN , DM , CM , CL , BL , BK , AK تؤلف مضلعاً اثني عشرياً منتظماً.

الحل: لنطابق ما بين المستوي و مجموعة الأعداد العقدية  .لنفرض أن الأعداد التي تمثل التقاط

D , C ,B ,A هي على الترتيب: .

النقطة K هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه A و زاويته هي  إذن العدد العقدي 

و بما أننا نستطيع أن نلاحظ أن المثلثات DAN , CDM , BCL هي صور للمثلث ABK و فق دوران حول المركز O(و هو مركز المربع) بزوايا  نستنتج أن الأعداد  التي تمثل التقاطN, M, L هي على التالي حسب علاقات الدوران تعطى بالصيغ:



و إذا رمزنا بالرمز z1 إلى العدد العقدي الذي يمثل منتصف القطعة المستقيمة LM كان في هذه الحالة:



وبما أن القطع المستقيمة KL , NK , MN هي صور القطعة المستقيمة LM وفق دورانات التي مركزها هو مركز المربع و زواياها هي  لتكن  هي منتصفات القطع المستقيمة السابقة على الترتيب تكون إحداثياتها حسب الآتي:

 و إذا رمزنا بالرمز  إلى منتصف القطعة المستقيمة AN كان:



و لأنه و بنفس الطريقة السابقة القطع المستقيمة DM ,CL ,BK هي أيضاً صورة القطعة المستقيمة السابقة وفق دوران بالنسبة لمركز المربع بزوايا  تكون إحداثيات المنتصفات للقطع المستقيمة السابقة هي على الترتيب

 حيث: و ذلك بالاستفادة من أن  .

و قد رمزنا بالرمز z2 إلى العدد العقدي الذي يمثل منتصف BL كان:

 و لأن القطع المستقيمة AK , DN ,CM هي صور القطعة المستقيمة السابقة وفق دوران مركزه هو مركز المربع و زواياه هي  .

نستنتج أن إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة السابقة هي على الترتيب  و تعطى بالصيغة :



و كما نستطيع أن نلاحظ أن كل هذه الرؤوس ناتجة عن دوران الرؤوس بزاوية ثابتة وبالتالي هي تقع على دائرة واحدة و بما أن هذه الزوايا متساوية فالأقواس المقابلة لها متساوية و بالتالي تتطابق الأوتار أيضاً فهو مضلع منتظم.

**المسألة الثالثة عشر(مسألة IMO عام 1982):**

نتأمل مسدساً منتظماً ABCDEF .M نقطة ما من القطر AC وn هي أيضاً نقطة ما من القطر CE نفترض أن  عين قيمة r إذا كانت النقاط N , M , B تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لنطابق بين نقاط المستوي و حقل الأعداد العقدية  و ليكن  .و بالتالي يمكن أن نفترض أن إحداثيات النقاط E , C , B , A هي على الترتيب  (و ذلك اعتماداً على صيغة الدوران و فكرة الزاوية الموجهة)و بالتالي تكون إحداثيات كل من النقطتين M , N على الشكل التالي و (ذلك حسب دستور حساب إحداثيات نقطة تقسم قطعة مستقيمة ما بنسبة معينة): و بالتالي يكون:

و إذا تذكرنا أن الجملة  تكون أساساً في المستوي استنتجنا أن النقاط N , M , B هي تقع على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان 

هذه الصيغة أتت من الجداء الخارجي للأشعة السابقة و التي يمكن التعبير عنها باستخدام محدد.

**المسألة الرابعة عشر:**

المضلعات النابليونية: هنا علينا أن نعرف مجموعة من المبرهنات و المفاهيم لكي نوظفها في برهان النظرية الكبرى و هي نظرية بارلوتي غريبر (barlotti greber).

نقول عن مضلع من الدرجة n أنه مضلع نابليوني إذا و فقط إذا كانت مراكز المضلعات المنتظمة من الدرجة ذاتها المنشأة على كل ضلع من أضلاعه تشكل مضلعاً نونياً منتظماً.

و الآن سوف نقوم ببرهنة النظرية التالية التي تدل على أن مضلع هو مضلع نابليوني إذا و فقط إذا كان ناتجاً عن تثبيت رأسين من مضلع منتظم من نفس الدرجة و إجراء انسحاب بمقدار معين لكل رأس من الرؤوس ال (n-2) الباقية.

في ما يلي و في قيامنا بالبرهان سوف نقرن كل نقطة بالعدد العقدي الممثل لها في هذا المستوي و سوف نرمز لهذا العدد العقدي بحرف صغير. و ليكن لدينا المضلع من الدرجة n و لنرمز له بالرمز p الذي رؤوسه هي  و سوف نرمز بالرمز  إلى المضلع الذي رؤوسه هي  التي هي مراكز المضلعات المنتظمة من الدرجة n المنشأة على الأضلاع  على الترتيب.

تعريف :نقول عن مضلع أنه مضلع نابليوني إذا كان المضلع مضلعاً منتظماً.

**النظرية الأولى:**

ليكن p مضلعاً معرفاً بنفس الشكل الذي عرفناه سابقاً و لتكن الرؤوس  هي رؤوس المضلع النوني المنتظم المنشأ داخلاً على الضلع  للمضلع p.إذاً يكون p مضلعاً نابليونياً إذا و فقط إذا كان : كفكرة مبدئية المبرهنة تعتمد على قولنا أن هذا المضلع هو مضلع نابليوني إذا كانت كل نقطة من نقاطه ناتجة عن سحب رؤوس مضلع نوني ما من نفس الدرجة بمقدار شعاعي محدد و بجهة واحدة حيث أن u هو عدد عقدي و إن :

و الآن الإثبات :

لتكن  و بما أن  هو مركز المضلع المنتظم المنشأ خارجاً على الضلع  للمضلع p إذاً وحسب خاصية الدوران الواضحة من كون المضلع الذي مركزه  نجد أن:

 و بالتالي لدينا أن : و بالتالي المضلع  منتظم إذا و فقط إذا كان: .

و الآن و بقلب الشرط و العمل عليه بتعويض مكان كل حد بالحد المكافئ له من المعادلة القبل السابقة نجد أن المضلع p يكون مضلعاً نابليونياً إذا و فقط إذا كان :



و الآن و بوضع أن كل رأس من رؤوس المضلع p ناتجة عن انسحاب رؤوس المضلع المنتظم المنشأ داخلاً على الضلع  و نعبر عن ذلك بالصياغة المكافئة التالية حيث أن  هي مقدار الانسحاب الشعاعي. و نلاحظ أن  لأنهما رأسان مشتركان و الانسحاب يساوي الصفر. لنضع الآن أن  المضلع هو مضلع منتظم إذاً النقطة  يحقق العلاقة السابقة (و ذلك كنتيجة منطقية من كون النقطة الأساسية  نتجت عن انسحاب بمقدار محدد فبالتأكيد العلاقة تتحقق على النقطة الناتجة)(مع العلم أن كل هذه العمليات تتم لتحويل الشرط من شكل إلى آخر حتى نحصل على الشرط المطلوب)و شكل المعادلة الآن حسب الآتي:

إذا كانu=0 إذا  (كنتيجة منطقية من كون الانسحاب الأساسي يساوي الصفر إذاً المضلع الأساسي منطبق على المضلع الموجود من الداخل وكل الانسحابات تساوي الصفر)

و بالتالي يمكننا و ضع أن  حيث أن  و بالتالي يمكننا أن نلاحظ أن العلاقة السابقة أيضاً تنطبق عليها المعادلة السابقة و بالتالي لدينا المعادلة الآتية بدلالة  : و الآن و بوضع  يمكن كتابة المعادلة السابقة بدلالة qk بالشكل:

 و الآن و باستخدام الاستقراء على k نجد التالي :



و بالأخذ بالحسبان أن  (و ذلك بمجرد تعويض بسيط من المعادلة )و بالتالي و باستخدام رمز المجموع نجد أن:



و الآن و بتطبيق العلاقة التي مفادها أن : .

ملاحظات حول الحل(نلاحظ أننا قد اعتمدنا على طريقة حل مفادها تحويل الشرط الأساسي العام إلى شروط أصغر و أدق و ذلك اعتماداً على علاقات منطقية و بسيطة فحصلنا على الشرط المطلوب).

**المسألة الخامسة عشر: نظرية أويلر:**

*في الرباعي ABCD إذا كانت M,P,N,Q منتصفات أضلاعه AB,BC,CD,ADفإن:*

*الإثبات:*

**المسألة السادسة عشر (مسألة IMO 1993 ):**

*في المثلث ABC تم اختيار نقطة D بحيث : و*

**C**

**A**

**B**

**D**

*أوجد*

الحل:

نفرض D مبدأً للإحداثيات و نفرض الأعداد a,b,c تمثل النقاطA,B,Cعلى الترتيب.

صورة9

,

نحصل على: و

ومنه:

لذا:

**المسألة السابعة عشر (مسألة IMO عام (1982:**

على أضلاع الرباعي ABCD ننشئ المثلثات متساوية الأضلاع ABM و CDP خارج الشكل. و نرسم المثلثات متساوية الأضلاع BCN , ADQ رسمت داخل الشكل. صف شكل الرباعي MNPQ.

لنرمز بحرف صغير لإحداثيات كل نقطة من النقاط. باستخدام صيغة الدوران في المثلثات متساوية الأضلاع نجد أن:

حيث أن  و من السهل أن نلاحظ أن:

 إذاً  هو متوازي أضلاع أو أن النقاط   تقع على استقامة واحدة.

**\_المسألة الثامنة عشر :نظرية مورليه :**

في المثلث ABC إذا كانت إذا كانت نقاط تقاطع كل منصفين ثلاثيين متجاورين فإن مثلث متساوي الأضلاع.

صورة10

نفرض أن المثلث ذو توجيه غير مباشر و نعرف التحويلات الهندسية الآتية:

و و

نلاحظ أن نقطة صامدة بالنسبة لـ حيث

**B**

**C**

**A**

**x**

**x**

**x**

**y**

**y**

**y**

**z**

**z**

**z**

**x**

**y**

نفرض أن هي صورة وفق فنلاحظ أن صورة وفق هي

و بالطريقة ذاتها نقطة صامدة بالنسبة لـ

و هي نقطة صامدة بالنسبة لـ .

نلاحظ أن

وأن

و أن

الصورة 10

حيث s هو رمز الانعكاس وفق مستقيم.

و مما سبق:

أي : و منه مثلث متساوي الأضلاع.

**\_المسألة التاسعة عشر :نظرية بابوس[[41]](#footnote-41):**

لنأخذ نقطة على محيط الدائرة المارة من رؤوس الرباعي الدائري أثبت أن جداء بعد هذه النقطة عن أي زوج من الأضلاع المتقابلة و عن الأقطار هو مقدار متساوي.

أولاً لنفرض أن a ,b , c ,d هي إحداثيات الرؤوس A , B ,C ,Dللرباعي الدائري السابق و لنفرض أن مبدأ المستوي العقدي يقع في مركز الدائرة المارة من رؤوس الرباعي السابق و بدون التقليل من عمومية المسألة يمكن أن نفرض أن نصف القطر يساوي الواحد. و معادلة المستقيم AB تعطى بالعلاقة : و لتكن النقطة  هي تقاطع العامود المنشأ من النقطة M على الضلع AB و نجد أن إحداثياتها تكون على الشكل الآتي:

 و بالتالي المسافة تعطى بالعلاقة الآتية:



و بما أن  إذاً و بنفس الطريقة نجد أن :



و بالتالي نستنتج أن 

و تم الإثبات.

**المسألة العشرون:**

لدينا شبه المنحرفABCD حيث ِAB يوازي CD و لتكن p نقطة من الضلع BC مختلفة عن B و C موصولة مع M منتصف CD إذا كانت Xهي نقطة تقاطع PD,AB و Q نقطة تقاطع PM,AC Y نقطة تقاطع DQ,AB أثبت أن M منتصف XY .

**الحل:**

نعرف التحاكيات: ,

كما نلاحظ أن: ينقل A إلى B و يترك M ثابتة ثابته و منه حيث هو دوران بزاوية 180 حول النقطة M .

*و منه أي M منتصف XY .*

**الّنتائج و المقترحات:**

تعدّ الأعداد العقديّة وسيلة جيدة لتمثيل المسائل الهندسيّة لأنَّها تمثّل بالمستوي و تؤمّن عمليات الجداء و القسمة و الجمع فيها طريقة سهلة للتّعامل مع التّحويلات الهندسية فهي تعيد صياغة المسألة بمعادلات جبرية قد تكون أسهل في كثير من الأحيان لكن في بعض الأحيان تكون هذه المعادلات الجبرية معقدة و عندئذ يفضّل عدم الاعتماد عليها. حيث يفضّل الاعتماد عليها في الحالات الآتية :

1. عندما نحتاج إلى إثبات أو إيجاد الوضع ما بين مستقيمين أو مجموعة نقاط (التّوازي أو الرّباعيات الدّائرية أو الوقوع على استقامة واحدة أو حتّى التّأكد من كون زاوية ما هي زاوية قائمة).في مثل هذه الحالات يتم التّأكد من صحّة كلّ حالة من الحالات باستخدام الأساسيات التي مرّت معنا سابقاً.
2. و تستخدم هذه الأعداد في إثبات أن مجموعة من النّقاط تقع على استقامة واحدة أو على دائرة واحدة و يفضّل استخدامها عند وقوع مجموعة من النّقاط على دائرة واحدة وذلك لما تتمتّع به النّقاط الواقعة على الدائرة من خواص تسهّل الوصول إلى الحل .
3. و عندما يكون لدينا شكل فيه عدد قليل من النّقاط و يمكن حساب إحداثيات كل نقطة من النّقاط بسهولة اعتماداً على إحداثيات النقاط الأخرى.

بينما هناك حالات أخرى لا يفضل أن تستخدم فيها الأعداد العقديّة :

1. عندما يكون الشّكل معقداً بحيث يصعب علينا أن نجد إحداثيات النّقاط و حتى إن وجدت ستكون معقدة بحيث يصعب التّعامل معها.
2. عندما تتعدد الدّوائر في المسألة المعطاة و عندها لا يمكن الاستفادة من خواص النّقاط الواقعة على دائرة واحدة.
3. إذا كانت خطوات الحل طويلة جداً بالطّريقة العقديّة مقارنة بالطّريقة الإقليدية,و عندها نؤول إلى الطّريقة الإقليدية في الحل.

و في النّهاية تبقى شروط المسألة و معطياتها هي ما يحدّد للباحث ما إن كان عليه أن يلجأ إلى الطّريقة الإقليدية أو الطّريقة العقدية.

**الخاتمة:**

وفي النهاية نجد أن بحث الأعداد المركبّة بحثاً مهماً جداً في الرياضيات له دور كبير في حلّ الكثير من المشاكل الرياضيّة التي تعترضنا ولكن ما نعاني منه في مجتمعنا العربي هو ضعف اهتمام العرب في هذا المجال واكتفائهم بالأساسيات دون التّعمق في هذا المجال.

وذلك كان من أبرز الصّعوبات التي واجهتنا في هذا البحث، بسبب نقص المراجع العربيّة وكون الموجود منها مترجماً من اللّغات الأجنبيّة بطريقة سيئة لمجرد التّرجمة إضافة إلى الأخطاء العديدة الموجودة فيها، إضافة إلى كون البحث جديداً كلياً بالنّسبة لنا حيث كان علينا أن نتعرف أولاً على مفهوم العدد العقدي ومرافقه و العمليات الأساسيّة عليه ثم تعلمنا طرق تمثيله و كيفية الحصول على جذور الأعداد العقديّة و بعدها تعرفنا على المبرهنات الهندسيّة الأساسيّة (إثبات الوقوع على استقامة واحدة و على دائرة واحدة ، وتشابه المثلثات والمثلثات المتساوية الأضلاع ). وتعرفنا على أبرز المعادلات الهندسيّة ( معادلة المستقيم والدّائرة ) ومنها استنتجنا كيفية إثبات التّوازي والتّعامد وغيرها...) ثم تعرفنا على النّقاط الشّهيرة في المثلث و كيفية حساب مساحة المثلث لنكون قادرين في القسم العملي على حلّ المسائل اعتماداً على الخبرات

و المعارف التي تعلمناها. وقد كان من أبرز المهارات التي اكتسبناها هو كيفية البحث و العمل كفريق للوصول لأهدافنا المذكورة سابقاً.

و في النّهاية نتمنى أن يسهم هذا البحث في إلقاء الضّوء على أهميّة الأعداد العقديّة في حلّ المسائل الهندسيّة و أن يكون مقدِّمة لغيره من المشاريع التي تبحث في المجال ذاته.

**المراجع و المصادر :**

* **الكتب الورقية :**
* كتاب الجبر للثالث الثانوي في المركز الوطني للمتميزين .
* **المجلات:**
* آفاق الرياضيات العدد 24،التشابه المباشر و الأعداد العقدية.
* **الكتب الإلكترونية:**
* Titu Andresco , dorin andreca , Complex Numbers From A To Z,THE 6TH EDITION
* Lecture 24 Polynomials, Nishant Pappiredi ,7/8/2011
* Complex Numbers And Geometry,Marco Radovanovice,2011
* Titu Andreescu and dorin andrica ,Educatia Mathematica vol.1,2005

فهرس الصور و الأشكال:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| الرقم | شرح الشكل | رقم الصفحة |
| 1 | أشكال العدد العقدي | 8 |
| 2 | متراجحة بطليموس | 76 |
| 3 | مبرهنة أوبل عقدياً | 82 |
| 4 | مبرهنة أوبل إقليدياً | 83 |
| 5 | مبرهنة أوبل إقليدياً | 83 |
| 6 | مثلثات نابليون | 84 |
| 7 | قانون نيوتن | 88 |
| 8 | قانون باسكال | 92 |
| 9 | مسألة IMO عام 1993 | 104 |
| 10 | نظرية مورليه | 105 |

1. د. عمران قوبا ، كتاب الجبر،ص61و62،منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا [↑](#footnote-ref-1)
2. د. عمران قوبا ، كتاب الجبر،ص62،منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا [↑](#footnote-ref-2)
3. د. عمران قوبا ، كتاب الجبر ، ص 63 ، حقوق النشر محفوظة للمعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا [↑](#footnote-ref-3)
4. د. عمران قوبا ، كتاب الجبر ،ص63،منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا [↑](#footnote-ref-4)
5. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P10, [↑](#footnote-ref-5)
6. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P(15,16) [↑](#footnote-ref-6)
7. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P21, [↑](#footnote-ref-7)
8. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P23, [↑](#footnote-ref-8)
9. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P(23>27) [↑](#footnote-ref-9)
10. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P(29>31), [↑](#footnote-ref-10)
11. Leithod ,L .The Calculus with Analytic Geometry .Harper and roe publishers,NewYork,1972 [↑](#footnote-ref-11)
12. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P36, [↑](#footnote-ref-12)
13. De Moivre’s Theorem ,CYNTHIA SCHNEIDER.2011.P7 [↑](#footnote-ref-13)
14. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P45, [↑](#footnote-ref-14)
15. Lecture 24:Polynomials,Pappiradi Nishant,7/8/2011,p17 [↑](#footnote-ref-15)
16. Assignment 6, November 25,2004,p1 [↑](#footnote-ref-16)
17. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P(53) [↑](#footnote-ref-17)
18. آفاق الرياضيات(مجلة)،ص168(بتصرف) [↑](#footnote-ref-18)
19. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z ,p 156, [↑](#footnote-ref-19)
20. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P68 [↑](#footnote-ref-20)
21. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P70,71,72,73 [↑](#footnote-ref-21)
22. إثبات الحالات من 1إلى 5 موجود في كتاب Titu adreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P71 [↑](#footnote-ref-22)
23. الإثبات موجود في كتاب Titu adreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P72 [↑](#footnote-ref-23)
24. كتاب المركز الوطني للمتميزين الجبر للثالث الثانوي ص 204 [↑](#footnote-ref-24)
25. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z ,p77 , [↑](#footnote-ref-25)
26. كتاب الجبر للثالث الثانوي في المركز الوطني للمتميزين،(بتصرف) [↑](#footnote-ref-26)
27. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P82, [↑](#footnote-ref-27)
28. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P77 [↑](#footnote-ref-28)
29. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P83 [↑](#footnote-ref-29)
30. Titu adreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P83 [↑](#footnote-ref-30)
31. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P84 [↑](#footnote-ref-31)
32. كتاب الجبر للثالث الثانوي في المركز الوطني للمتميزين ص205 [↑](#footnote-ref-32)
33. Titu adreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P86 [↑](#footnote-ref-33)
34. Marco Radovanovic , Complex Numbers In Geometry ,IMO ,1998 [↑](#footnote-ref-34)
35. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P86 [↑](#footnote-ref-35)
36. Titu andreescu, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P(103>115) [↑](#footnote-ref-36)
37. Titu andreesco, dorin andrica , complex numbers from A to Z , P109, [↑](#footnote-ref-37)
38. Titu Andreescu and dorin andrica ,Educatia Mathematica vol.1,2005 pages:19 , 20 , 21 , 23 , 25 [↑](#footnote-ref-38)
39. Problem solving strategy ,a group of doctors,p297 [↑](#footnote-ref-39)
40. A Problem solving stratigies, group of doctors ,p296 [↑](#footnote-ref-40)
41. هذه المسألة تم أخذها من كتاب COMPLEX NUMBERS FROM A TO Z للكاتب TITU ANDREESCU في الصفحة 192. [↑](#footnote-ref-41)