المركز الوطني للمتميزين

The National Centre for the Distinguished

التكاملات المعتلة

للعام الدراسي 2015-2016م

التكاملات المعتلة

تقديم : رهف عماد الدين حبيب
بإشراف: أ. منذر حميدوش

ملخص

يقدم هذا البحث دراسة التكامل غير المحدد و المحدد وصولاً للتكاملات المعتلة وخواصها إضافة لدراسة تكاملات أولر.

المقدمة

لا شك أن الكثير من العلوم الرياضية ظهرت بوادرها منذ عصور قديمة جداً، ومن هذه العلوم التكامل، فقد وجد دلالات تاريخية على استخدام التكامل في عهد قدماء المصريين (حوالي 1800 قبل الميلاد) فدلت بردية موسكو الرياضية على علمهم بصيغة لحساب حجم الهرم المقطوع. وتعد طريقة الاستنزاف من أوائل الطرق المستعملة في إيجاد التكاملات حيث تعود إلى 370 قبل الميلاد وكانت تحسب بها الحجوم والمساحات وذلك بتقسيمها إلى أشكال صغيرة غير منتهية معلومة المساحة أو الحجم. زظهرت أولى أفكار حساب التكامل في أعمال الرياضي الإغريقي المشهور أرخميدس الذي قام بوضع العديد من القوانين في الهندسة مثل حجم ومساحة سطح الكرة، مستخدماً في ذلك طرقاً كانت بداية لتلك الطرق المستخدمة اليوم في حساب التكامل.

يمكن ملاحظة أن التكامل ظهر قبل التفاضل وأنه مثله مثل بقية العلوم الرياضية، بدأ بأفكار و مفاهيم بسيطة ثم أخذ ينمو حتى استطاع عدد من العلماء وضعه في إطاره الصحيح والمقبول ففي القرنين السادس عشر والسابع عشر الميلاديين، شغل العديد من علماء الرياضيات بمسائل تتطلب حساب التفاضل والتكامل، حتى قام كل من إسحاق نيوتن وغوتفريت ليبينز كل على حدا، باكتشاف النظرية الأساسية لحساب التفاضل . وبسبب هذا الاكتشاف يطلق عليهما اسم مؤسسي علم حساب التفاضل والتكامل.

إشكالية البحث

عند دراستنا للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ افترضنا أن المجال $[a,b]$ متراص، وحدود التكامل أعداد محدودة، كما أن التابع المكامل هو تابع محدود على هذا المجال....

- ❖ فهل بإمكاننا مكاملة تابع إذا كان مجال مكاملته غير محدود من أحد الطرفين أو كلاهما؟؟
- ❖ هل يمكن حساب التكامل لتوابع منقطعة عند أحد طرفي المجال أو كليهما، أو نقطة داخل مجال المكاملة؟؟
- ❖ هل يوجد طرق أخرى نلجأ إليها عند حساب التكامل المحدد حينما يصعب علينا الحساب بالطرق المألوفة؟؟

الفصل الأول

الباب الأول

مفهوم الدالة الأصلية ـ التكامل غير المحدد:

في كثير من المسائل الهندسية والفيزيائية يطلب إيجاد دالة $F(x)$ ، بحيث يكون مشتقها دالة معطاة هي $f(x)$.

إن هذه المسألة معاكسة لمسألة اشتقاق دالة وتسمى تكامل الدالة $f(x)$ ، و تكون بإيجاد جميع الدوال $F(x)$ التي مشتق كل منها يساوي الدالة $f(x)$. إن هذا يقودنا إلى تعريف الدالة الأصلية.[1]

تعريف الدالة الأصلي:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$. نسمي الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ إذا كان مشتق الدالة $F(x)$ هو $f(x)$ ، أي أن:

$$\frac{dF}{dx}=F'(x)=f(x);\forall x\in[a,b] \qquad (1.1)$$

أو

$$dF(x)=f(x)dx$$

من الواضح أنه إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$، فإن الدالة $F(x)+c$ هي أيضاً دالة أصلية للدالة $f(x)$ ، حيث يمثل c ثابتاً عددياً ما. وذلك لأنه بحسب العلاقة (1.1) فإن:

$$(F(x)+c)'=F'(x)+c'=F'(x)=f(x)$$

ومنه نستنتج وجود أسرة من الدوال الأصلية للدالة المعطاة $f(x)$ ، تختلف عن بعضها البعض بأعداد ثابتة.

وبالعكس، إذا كان $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دالتين أصليتين للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$، فإنهما تختلفان عن بعضيهما بمقدار ثابت c على المجال $[a,b]$، أي أن:

$$F_1(x)=F_2(x)+c \qquad (2.1)$$

في الحقيقة بحسب العلاقة (1.1) نكتب:

---

[1] يعقوب, د. ع. ا. ي. أ. خ. ق. أ. س. (2007-2008). التكامل. جامعة تشرين, كلية العلوم.

$$(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

هذا يعني وجود عدد ثابت c بحيث:

$$F_1(x)-F_2(x)=c$$

أي أن:

$$F_1(x)=c+F_2(x)$$

تعريف التكامل غير المحدد:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a,b]$. إن أحد الدوال الأصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ نسميها تكاملاً غير محدد للدالة $f(x)$ ، ونرمز لها بالرمز:

$$\int f(x)dx$$

بهذا الشكل، فإذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$، فإن التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ على ذلك المجال هو:

$$\int f(x)dx=F(x)+c \qquad (3.1)$$

حيث c عدد ثابت كيفي.

نسمي $f(x)$ الدالة المستكملة، و $f(x)dx$ المقدار المستكمل.

ملاحظة :

إن عملية إيجاد التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ هو عملية عكسية للتفاضل، كما أن عملية إيجاد الدالة الأصلية معاكسة لعملية إيجاد المشتق.

خواص التكامل غير المحدد:

من تعريف التكامل غير المحدد مباشرة يمكن استنتاج الخواص الآتية :

- $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

أي أنه إذا وردت إشارتا التفاضل d والتكامل $\int$ متعاقبتين، فإنه يمكن اختصار الإشارتين.

- بما أن $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $F'(x)$ ، فإن: $\int F'(x)dx = F(x) + \mathrm{c}$

و يمكن كتابة العلاقة بالشكل الآتي:

$$\int dF(x)dx = F(x) + \mathrm{c}$$

- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ حيث a ثابت

أي أن الثابت يتم إخراجه خارج إشارة التكامل، من ثم نجري المكاملة.

- $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm f_2(x)dx$

ويمكن تعميم هذه الخاصة لعدد محدود من التوابع القابلة للمكاملة.

جدول التكاملات الأساسية:[1]

إذا أخذنا بعين الاعتبار أن عملية التكامل هي عملية معاكسة لعملية الاشتقاق يمكننا أن نستنتج جدولاً يتضمن العديد من التكاملات الأساسية البسيطة لأننا نعلم مشتقات العديد من التوابع أضف إلى أن قواعد الاشتقاق هي في الواقع أسهل بكثير من قواعد التكامل.

على سبيل المثال لدينا قاعدة محددة لإيجاد مشتق الجداء $v.u$ ، أو مشتق النسبة $\frac{u}{v}$ حيث u و v قابلان للاشتقاق، لكن لا توجد قاعدة ثابتة لمكاملة الجداء السابق، أو النسبة السابقة، حتى لو كنا على معرفة بتكامل كل من u و v، إلا أننا سنستفيد من كون مشتق التابع الأصلي هو التابع المكامل، أي أن:

$$[\mathrm{F}(x) + \mathrm{c}]' = f(x)$$

فيما يلي نقدم بعض التكاملات الشهيرة:

1	$\int 1dx = x + c$
2	$\int adx = ax + c$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$

[1] متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2011-2010). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c; x \neq 0$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
6	$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
7	$\int \cos x dx = \sin x + c$
8	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
11	$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
12	$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
13	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + c$
14	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + c$
15	$\int e^x dx = e^x + c$
16	$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$
17	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
18	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$
19	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
20	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + c = \mathrm{arcth}x + c$
21	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$
22	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
23	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

24	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
25	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\tan\frac{x}{2}\right\| + c$
26	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right\| + c$
27	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + c$
28	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \mathrm{arcsh}x + c = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + 1}\right\| + c$
29	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \mathrm{arcch}x + c = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - 1}\right\| + c$
30	$\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + c$
31	$\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + c$
32	$\int thx dx = \ln\left\|\mathrm{ch}x\right\| + c$
33	$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + c$
34	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + c$
35	$\sec x \tan x dx = \sec x + c$
36	$\cos\mathrm{ec}x \cot\mathrm{an}x dx = -\cos\mathrm{ec}x + c$

ملاحظة:

لإثبات أي من هذه التكاملات يكفي التأكد من أن مشتق الطرف الأيمن يساوي التابع الموجود داخل إشارة التكامل.

طرق حساب التكامل غير المحدد:[1]

الطريقة المباشرة:

يمكن حساب الكثير من التكاملات مباشرةً بالاعتماد على خواص التكامل غير المحدد، وجدول التكاملات الأساسية، حيث يعتمد هذا الأسلوب في المكاملة على استبدال التابع المكامل بمجموعة من التوابع التي يسهل علينا مكاملتها.

مثال:

$$I=\int (\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^5}+\frac{4}{5x})dx$$

الحل:

$$2\sqrt{x}+\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+\frac{4}{5}\ln|x|+c$$

حساب التكامل بطريقة تغيير المتحول:

إذا لم يكن بالإمكان حساب التكامل لبعض الدوال بالطريقة المباشرة، فإننا نلجأ إلى طريقة أخرى. تعد هذه الطريقة من الطرق الهامة في حساب التكاملات، وتتلخص بأن نجري تغييراً في المتحول بحيث يؤول التكامل إلى أحد التكاملات المشهورة، أو على الأقل يصبح أسهل من التكامل الأصلي، حيث يحسب مباشرة بالاستناد إلى خواص التكامل غير المحدد وجدول التكاملات الأساسية. إلا أن الوصول إلى هذه الحالة، يتطلب خبرة في اختيار المتحول الجديد، نظراً لعدم وجود قاعدة ثابتة تطبق على جميع الحالات.

ليكن المطلوب حساب التكامل $\int f(x)dx$ ، ولم يكن بالإمكان حسابه مباشرة .

لنفرض متحولاً جديداً $t=g(x)$ ، وتكون الدالة $x=\varphi(t)$ حيث φ دالة قابلة للاشتقاق ومستمرة، عندئذ $dx=\varphi'(t)dt$ ، وبالتالي:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F(t)+\mathrm{c}$$

وبالتالي يمكن حساب التكامل الأصلي بالعلاقة:

$$\int f(x)dx=F[\mathrm{g}(x)]+\mathrm{c}$$

[1] يعقوب, د. ع. ا. ي. أ. خ. ق. أ. س. (2007-2008). التكامل. جامعة تشرين, كلية العلوم.

مثال:

$$\int \cos^3 x \sin x dx$$

الحل:

نفرض أن $t = \cos x$ فيكون $dt = -\sin x dx$ وبالتعويض في التكامل نجد:

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + c$$

و بالعودة إلى المتحول الأصلي، نجد:

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

ملاحظة:

في بعض الأشكال المعقدة للتكاملات قد يتطلب الحل تغيير المتحول أكثر من مرة، حيث أنه نتيجة تغيير المتحول في المرة الاولى تنتج دالة أبسط من الدالة الأولى، إلا أنه لا تكامل مباشرة، و لذلك نلجأ لتغيير المتحول مرة أخرى.

حساب التكامل بطريقة التجزئة:

بما أن المكاملة هي عملية معاكسة لعملية التفاضل، فإن كل قاعدة من قواعد التفاضل يجب أن تقابلها قاعدة في عملية التكامل ، و تنتج طريقة التكامل بلتجزئة من قاعدة تفاضل جداء دالتين.

لتكن الدالتين $u(x)$ و $v(x)$ قابلتين للمفاضلة على مجال ما فحسب قاعدة تفاضل جداء دالتين نكتب:

$$d(u.v) = udv + vdu$$

وبالتالي :

$$udv = d(u.v) - vdu$$

بمكاملة طرفي العلاقة الأخيرةن نجد:

$$\int udv = \int d(u.v) - \int vdu$$

أو

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

تسمى العلاقة الأخيرة دستور التكامل بالتجزئة، و يمكن كتابتها بالشكل:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

الباب الثاني

التكامل المحدد:

يعتبر التكامل المحدد أحد أهم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي للدارسين في مجالات مختلفة من العلوم، فهو يمثل وسيلة أساسية في حساب المساحات المحددة بالمنحنيات وأطوالها، وفي حساب الحجوم، وعزوم العطالة، وعمل القوى، ومواضيع أخرى كثيرة.[1]

تعريف التكامل المحدد:[2]

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$. سنقوم بالعمليات الآتية على المجال $[a,b]$، والدالة $f(x)$:

1- نقسم المجال $[a,b]$ إلى n جزء، وذلك باستخدام النقاط $x_1, x_2, \ldots x_n$ ، حيث:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ونرمز لأطوال هذه الأجزاء بالرمز λ ، أي أن:

$$\lambda = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \ldots, (x_n - x_{n-1})\}$$

[1] متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2010-2011). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

[2] يعقوب, د. ع. ا ي. أ. خ. ق. أ. س. (2007-2008). التكامل. جامعة تشرين, كلية العلوم.

2- نختار من كل جزء، مثل (x_{k-1},x_k) ، نقطة، مثل $\overline{x}_k$ ، حيث $x_{k-1}\le\overline{x}_k\le x_k$ ، ونحسب قيمة $f(x)$ في هذه النقطة، أي نحسب $f(\overline{x}_k)$.

3- نوجد جداء $f(\overline{x}_k)$ في طول الجزء $[x_{k-1},x_k]$ ، أي:

$$f(\overline{x}_k).(x_k-x_{k-1})$$

4- نقوم بجمع جميع هذه الجداءات التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\sigma=\sum_{k-1}^{n} f(\overline{x}_k).(x_k-x_{k-1})$$

نسمي هذا المجموع بالمجموع التكاملي أو مجموع ريمان.

5- نجعل تقسيمات المجال $[a,b]$ تنتهي إلى اللانهاية، أي نصغر المجالات الجزئية بحيث ينتهي أطولها إلى الصفر. إذا انتهى المجموع السابق إلى نهاية محدودة، مثل I ، و هذه النهاية كانت لا تتعلق بطريقة التقسيم، ولا بطريقة اختيار النقاط $\overline{x}_k$. نسمي هذه النهاية :

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sigma$$

بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$، ونرمز له بالرمز:

$$\int_a^b f(x)dx$$

ونسمي العدد a بالحد الأدنى للتكامل، و b بالحد الأعلى، كما نسمي المجال $[a,b]$ بمجال التكامل.

إن التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ هو النهاية المحدودة لمجموع ريمان عندما ينتهي أطول المجالات الجزئية λ إلى الصفر، ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k-1}^{n} f(\overline{x}_k).(x_k-x_{k-1})$$

ملاحظة:

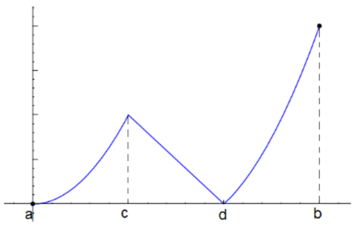
بما أن التكامل المحدد هو نهاية محدودة لمقدار متحول ما، وبما أنه ليس من الضروري في الحالة العامة أن تكون لكل مقدار متحول نهاية محدودة، أي ليس من الضروري أن يكون للدالة تكامل محدود، لذلك نورد النظريتين الآتيتين سنقبلهما بدون برهان:

مبرهنة (1): إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$، فإن التكامل المحدد له $\int_a^b f(x)dx$ يكون موجوداً.

مبرهنة (2): إذا كانت الدالة $f(x)$ متقطعة الاستمرار على المجال المغلق $[a,b]$، فإن التكامل المحدد له $\int_a^b f(x)dx$ يكون موجوداً.

إن مفهوم الاستمرار المتقطع مفهوم سهل، يمكن توضيحه بالمثال الآتي:

لتكن $f_1(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,c[$ حيث $a<c<d<b$، و $f_2(x)$ دالة مستمرة على المجال $]c,d[$. والدالة $f_3(x)$ مستمرة على المجال $]d,b]$ إن الدالة $f(x)$ التي تطابق $f_1(x)$ من أجل قيم x المحققة للمتراجحة $a\le x<c$ ، وتطابق $f_2(x)$ من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $c<x<b$، وتطابق $f_3(x)$ من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $d<x\le b$، وذلك مهما كانت قيمته في النقطة $x=c$ أو في النقطة $x=d$ ، يتألف من ثلاثة أجزاء مستمرة كما في الشكل:

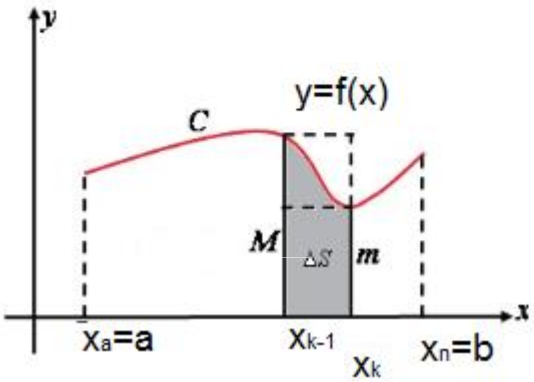


الشكل 1

نقول عن هذه الدالة أنها متقطعة الاستمرار، إذن الدالة المتقطعة الاستمرار هي الدالة التي تتشكل من عدد الأجزاء المستمرة، أي كل جزء من هذه الأجزاء هو دالة مستمرة.

المعنى الهندسي للتكامل المحدد:

لتكن $f(x)$ دالة موجبة ومستمرة على المجال المغلق $[a,b]$، فإننا نسمي السطح المحصور بين المنحني ومحور السينات، و المستقيمين $x=a$ و $x=b$ شبه منحرف إذا كان الخط البياني لـ $f(x)$ مستقيماً، ويسمى شبه منحرف منحني إذا كان غير ذلك، وسنرمز بـ S لمساحة هذا السطح، و لنحسب مساحته، من أجل ذلك نجزئ المجال المغلق $[a,b]$ إلى n جزء بوساطة النقاط $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ ، ثم نقيم من هذه النقاط مستقيمات موازية لمحور العينات، فينقسم السطح إلى n شريحة كما في الشكل:



نلاحظ من الشكل أنه يمكن اعتبار كل شريحة من هذه الشرائح (بشكل تقريبي) مستطيلاً، وبما أن الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$، فإن تغيره لن يكون ملحوظاً على الجزء $[x_{k-1},x_k]$، وذلك لكون هذا الجزء صغيراً جداً. بمعنى آخر، نقول أن الدالة $f(x)$ ثابتة تقريباً على المجالات الجزئية $[x_{k-1},x_k]$، طالما هذه المجالات صغيرة جداً، هذا يعني أن كل شريحة من هذه الشرائح تشكل تقريباً مستطيلاً، إن طول المستطيل المشار إليه في الشكل في النقطة $\overline{x}_k$ يساوي $f(\overline{x}_k)$ ، أما عرضه فيساوي x_k-x_{k-1} ، وبالتالي فإن مساحة هذه الشريحة تساوي $f(\overline{x}_k)(x_k-x_{k-1})$ ، وبناءً على ذلك، فإن مجموع مساحات هذه الشرائح يساوي تقريباً مساحة السطح المطلوب، أي أن:

$$S\simeq\sum_{k=1}^{n}f(\overline{x}_k)(x_k-x_{k-1})$$

نلاحظ أن هذه المساواة تزداد دقة كلما ازدادت عدد تقسيمات المجال $[a,b]$ بشكل لا متناه، وكلما صغرت λ (حيث λ أطول المجالات الجزئية الناتجة عن التقسيم). وهذا يعني أن المساحة S ، تساوي وبشكل دقيق، نهاية المجموع السابق عندما $\lambda\to 0$ ، و $n\to\infty$ ، أي أن:

$$S \simeq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$

وحسب تعريف التكامل المحدد، نجد أن هذه النهاية ماهي إلا التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$، أي أن:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

وبذلك نصل إلى الخلاصة الآتية: إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة وموجبة على المجال $[a,b]$، فإن التكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ يساوي مساحة المنطقة المحددة من الأسفل بمحور السينات، ومن الأعلى بالمنحني $y = f(x)$ ، ومن الجوانب بالمستقيمين $x = a$ و $x = b$.

حساب التكامل المحدد:

قبل التطرق إلى كيفية حساب التكامل المحدد، لابد من معرفة خاصيتين أساسيتين، و ندخل فيها إلى مبرهنة تساعدنا في حساب التكامل المحدد.

خاصة أولى: لا يتغير التكامل المحدد إذا غيرنا رمز متحول التكامل، أي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\mathrm{t})dt$$

خاصة ثانية: ينعدم التكامل إذا تساوى الحدين الأعلى والأدنى، أي:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

هذا يعني أن مساحة الشكل الهندسي المحصور بين $x = a$ و $x = a$ و $y = 0$ والمنحني $y = f(x)$ معدومة.

علاقة نيوتن – ليبتز

مبرهنة(المبرهنة الأساسية لحساب التكامل المحدد): إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، وكانت $\phi(x)$ دالة أصلية لها على المجال $[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

تسمى هذه العلاقة صيغة نيوتن – ليبتز.

البرهان:

بفرض أن $F(x)$ دالة أصلية أخرى غير $\phi(x)$، وكما نعلم أنه يختلف عن $\phi(x)$ بثابت، أي أن أحدهما ينتج عن الآخر بإضافة ثابت c، أي:

$$F(x) = \phi(x) + \mathrm{c}$$

عندئذٍ يمكن أن نكتب:

$$\int_a^b f(t)dt = \phi(x) + \mathrm{c}$$

ويمكن تحديد c، وذلك إذا بدلنا x بـ $x = a$ ، في التكامل السابق:

$$\int_a^b f(t)dt = \phi(a) + \mathrm{c} = 0$$

وبالتالي فإن $c = -\phi(a)$. إذاً:

$$\int_a^b f(t)dt = \phi(x) - \phi(a) = 0$$

ولو بدلنا x بـ $x = b$، نجد أن:

$$\int_a^b f(t)dt = \phi(\mathrm{b}) - \phi(a) = 0$$

تعد هذه المبرهنة صحيحة أيضاً من أجل $a > b$.

الخواص الأساسية للتكامل المحدد:[1]

1- إذا بدلنا بين حدي التكامل المحدد، فإن التكامل يغير إشارته.

في الحقيقة اعتبرنا في صيغة نيوتن – ليبتز أن $a<b$، وذكرنا أن الصيغة تبقى صحيحة إذا كانت $a>b$، ولذلك نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(\mathrm{b}) - \phi(a) = -[\phi(a) - \phi(\mathrm{b})] = -\int_a^b f(x)dx$$

2- إذا كانت c نقطة في المجال $[a,b]$، أي إذا كان $c \in [a,b]$ ، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3- يمكن إخراج الثابت k خارج إشارة التكامل، أي:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4- إن تكامل مجموع عدد منتهٍ من الدوال المستمرة على المجال $[a,b]$ يساوي مجموع تكامل كل دالة على هذا المجال، أي أن:

$$\int_a^b [f_1(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

5- بفرض أن $f(x)$ دالة موجبة، وأن $a<b$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

6- إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين على المجال $[a,b]$، و تحققان $f(x) < \mathrm{g}(x)$ على جميع نقاط المجال $[a,b]$، فإن:

---

[1] متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2010-2011). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

7- تنص هذه الخاصة على أنه مهما تكن c نقطة في المجال $[a,b]$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

و تسمى هذه الخاصة مبرهنة القيمة الوسطى في التكامل المحدد.

طرق حساب التكامل المحدد:[1]

حساب التكاملات المحددة اعتماداً على المبرهنة الأساسية في حساب التكامل المحدد(صيغة نيوتن – ليبتز).

حساب التكاملات المحددة بطريقة التجزئة:

وجدنا في حساب التكاملات غير المحددة أن دستور التكامل بالتجزئة يعطى بالعلاقة:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

وباستعمال صيغة نيوتن – ليبتز على هذه العلاقة، نجد أن:

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

حساب التكاملات المحددة بطريقة تغيير المتحول:

إن صيغة نيوتن – ليبتز تسمح لنا بإيجاد دستور حساب التكاملات المحددة بطريقة تغيير المتحول، وسوف نهتم بدراسة التكامل المحدد الآتي:

$$\int_a^b f(x)dx$$

بطريقة تغيير المتحول، حيث $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، ولهذا الغرض نفرض أن $x=\varphi(t)$ حيث أن $\varphi(t)$ يحقق الشروط الآتية:

a) الدالة $\varphi(t)$ معرفة ومستمرة في مجال $[\alpha,\beta]$، ويأخذ قيمة في المجال $[a,b]$ عندما تتحول t في المجال $[\alpha,\beta]$.

[1] يعقوب, د. ع. ا. ي. أ. خ. ق. أ. س. (2007-2008). التكامل. جامعة تشرين, كلية العلوم.

b) إن $\varphi(\alpha)=a$ ، و $\varphi(\beta)=b$.

c) الدالة $\varphi(t)$ قابلة للاشتقاق في المجال $[\alpha,\beta]$، ومشتقها مستمر في هذا المجال.

وبالتالي، يصبح التكامل المحدد بالشكل الآتي:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (\varphi(x))\varphi'(t)dt$$

الفصل الثاني

الباب الأول

التكاملات المعتلة:

عندما عرفنا التكامل المحدد للدالة $f(x)$ على المجال المغلق $[a,b]$، كانت حدود التكامل أعداداً محدودة، والدالة المستكملة $f(x)$ محدودة في المجال $[a,b]$، وكان ذلك شرطاً أساسياً لإيجاد المجموع التكاملي:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$

أما الآن، فسوف نحاول توسيع مفهوم التكامل المحدد من أجل الحالات التي تكون فيها :

1- $a=\infty$ أو $b=\infty$ أو كلاهما معاً، هذا يعني أن يكون أحد طرفي المكاملة غير محدود أو كليهما معاً غير محدود.

2- التابع المكامل $f(x)$ والواقع تحت رمز التكامل غير محدود عند نقطة أو أكثر من نقاط المجال المغلق $[a,b]$.

في الحقيقة لا نستطيع اتباع الطريقة المتبعة في تعريف التكامل المحدد من أجل تعريف هذا النوع من التكاملات؛ لأننا لا نستطيع تجزئة المجال بالأصل، وهو غير منته، مثل المجال $[a,\infty[$، فإن أية تجزئة لهذا المجال ستحوي مجالاً جزئياً غير محدود. ولذلك لابد من اتباع طرق أخرى من أجل تعريف هذا النوع من التكاملات التي تسمى بالتكاملات المعتلة أو غير الذاتية، كما تسمى غير الأصلية. [1]

وهذه التكاملات تقسم إلى: [2]

تكاملات معتلة من النوع الأول، و تكاملات معتلة من النوع الثاني، وتكاملات معتلة من النوع الثالث.

إن التكامل الذي يحقق الشرط الأول نسميه تكاملاً معتلاً من النوع الأول، والتكامل الذي يحقق الشرط الثاني نسميه تكاملاً معتلاً من النوع الثاني، أما التكاملات التي تحقق الشرطين معاً أي أن مجال المكاملة غير محدود و كذلك التابع الناتج غير محدود على مجال المكاملة نسميه تكاملاً معتلاً من النوع الثالث.

[1] متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2010-2011). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

[2] الغصين, د. أ. (1993-1994). التحليل(3). جامعة تشرين, كلية العلوم.

التكاملات المعتلة من النوع الأول:

تأخذ أحد الأشكال الآتية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,\infty]$، فهي قابلة للتكامل في أي مجال جزئي محتوى في هذا المجال، مثل المجال $[a,u]$، وذلك مهما تكن $u>a$ ، ونستطيع في هذه الحالة أن نكتب:

$$\varphi(u)=\int_{a}^{u} f(x)dx$$

وهذا التكامل، كما سنرى، يتبع للحد الأعلى، ويكون مستمراً لهذا المتحول، وعندما نجعل المتحول u يسعى إلى اللانهاية ، يمكن أن يكون لـ $\varphi(u)$ قيمة محددة أو غير محددة أو أن لا توجد له قيمة .

أمثلة:

إن النهاية الآتية :

$$\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{dx}{x^2}=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{t}+1\right]=1$$

موجودة و محددة. أما النهاية:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}3x^2dx=\lim_{t\to\infty}\left[x^3\right]_1^t=\infty$$

فهي نهاية غير محدودة. غير أن النهاية :

$$\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\sin xdx=\lim_{t\to\infty}\left[-\cos x\right]_0^t=\lim_{t\to\infty}\left[-\cos x+1\right]$$

غير موجودة؛ لأن $|\sin x|\le 1$ ، وذلك مهما تكن $x\in[0,\infty[$.

من هذه المقدمة، و الأمثلة، نستطيع أن نصل إلى التعريف الآتي: إذا كان للتكامل $\int_a^t f(x)dx$ نهاية محدودة عندما تسعى t إلى اللانهاية، فإننا نسمي هذه النهاية بالتكامل المعتل للدالة $f(x)$ على المجال $[a,\infty[$ ، ونرمز له بالرمز: $\int_a^\infty f(x)dx$ ، الذي يساوي: $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$

أي أن:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

فإذا كانت هذه النهاية محدودة، قلنا أن التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب، وإلا فهو متباعد أو غير موجود.

وبشكل مشابه يمكن أن نعرف التكاملات المعتلة على المجال من الشكل $]-\infty,b]$ ، على النحو الآتي:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

وكذلك يمكن أن نعرف التكاملات المعتلة على المجال $]-\infty,+\infty[$ وذلك باتباع خواص التكامل المحدد، برده إلى مجموع تكاملين:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \quad \text{حيث} \quad c\in]-\infty,+\infty[$$

ملاحظة 1: يكون التكامل في الطرف الأيسر متقارباً إذا كان كل من التكاملين الموجودين في الطرف الأيمن متقارباً أو يكون التكامل في الطرف الأيسر متباعداً إذا كان أحد التكاملين على الأقل في الطرف الأيمن متباعداً.

ملاحظة 2: نستنتج مما سبق أن التكاملات المعتلة من النوع الأول هي نهاية لتكاملات محدودة عندما ينتهي أحد حديها أو كلاهما إلى $\pm\infty$.

ملاحظة 3: في التكاملات المعتلة يمكن استخدام قواعد التكامل التي درسناها في التكاملات المحدودة مع ملاحظة أنه، في بعض الأحيان، و نتيجة استخدام طريقة التعويض، يتحول التكامل من تكامل معتل إلى تكامل محدود.

تكاملات التوابع المنقطعة (الغير مستمرة):[1]

وهي التكاملات المعتلة من النوع الثاني.

تعريف: نقول عن تكامل أنه معتل من النوع الثاني إذا لم يكن التابع المكامل مستمراً عند أحد طرفي المجال، أو كليهما، أو في نقطة على الأقل داخل مجال المكاملة، مثلاً:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

التابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ يعاني انقطاع في $x=1\in[0,2]$ أيضاً:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2}$$

$f(x)=\frac{1}{x^2}$ غير مستمر عند $x=0$ (أحد طرفي المجال).

في الواقع يمكن حساب مثل هذه التكاملات عندما تكون متقاربة، وبمعنى آخر، هناك حالات يمكننا فيها حساب تكاملات لتوابع غير مستمرة على مجال المكاملة، فمثلاً إذا كان $f(x)$ يعاني انقطاعاً في النقطة c أي أن:

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty \qquad , \qquad a\le c\le b$$

عندئذٍ نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

تعريف: ليكن التابع $f(x)$ معرفاً على المجال $[a,b]$ مع $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ قابلاً للمكاملة على $[\alpha,b]$ حيث $\alpha>a$ وكانت النهاية $\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)dx$ موجودة و وحيدة نقول عندئذٍ أن التكامل :

$$\int_a^b f(x)dx$$

متقارب ونكتب:

---

[1] متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2010-2011). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx$$

أما من أجل : $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx : \beta < b$$

إذا لم يكن التكامل متقارباً نقول إنه متباعد أو ليس له معنى.

التكاملات المعتلة من النوع الثالث:

إن التكاملات المعتلة من النوع الثالث يمكن التعبير عنها بدلالة التكاملات المعتلة من النوع الأول ومن النوع الثاني وبالتالي فإن جميع الملاحظات التي أوردناها فيما سبق بالنسبة للتكاملات المعتلة من النوع الأول والثاني تصح هنا أيضاً.

خواص التكاملات المعتلة:[1]

إن أغلب خواص التكاملات تبقى صحيحة بالنسبة للتكاملات المعتلة، و ذلك لأن التكامل المعتل هو نهاية تكامل محدد:

1- إذا كان التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً ، فإن $\int_a^\infty kf(x)dx$ يكون متقارباً، حيث يمثل $k \neq 0$ عدداً ثابتاً. عندئذ يمكن أن نكتب:

$$\int_a^\infty kf(x)dx = k\int_a^\infty f(x)dx$$

2- إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان ، فإن التكامل :

$$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^\infty f(x)dx \pm \int_a^\infty g(x)dx$$ متقارب.

وإذا تباعد أحدهما تباعد مجموعهما أو فرقهما.

[1] جوجة, د. غ. (2014). تكاملات معتلة. تكاملات معتلة. د. غ. جوجة.

3- إذا كان $f(x)\geq 0$ على المجال $[a,\infty[$ ، فإن :

$$\int_a^\infty f(x)dx \geq 0 \int_a^\infty f(x)dx \geq 0$$

4- إذا كان التكاملان المعتلان $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربين وكان :

$f(x)\geq g(x) : \forall x \in [a,\infty[$ فإن: $\int_a^\infty f(x)dx \geq \int_a^\infty g(x)dx$

5- إذا كان التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً فإن : $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^\infty f(x)dx = 0$

6- إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً على المجال $[a,\infty[$ وقابل للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق و محدود $[a,A]\subset[a,\infty[$ وكان $F(x)$ تابعه الأصلي على المجال $[a,\infty[$ تتحقق العلاقة الآتية:

$\int_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty$ حيث أن $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

والتي تسمى علاقة نيوتن لبينتز أو تسمى بالنظرية الأساسية في الحساب التكاملي بالنسبة للتكاملات المعتلة.

اختبارات التقارب:[1]

في كثير من الأحيان يُطلب دراسة تقارب التكامل المعتل، ويكون حسابه نوعاً ما معقّداً، فعندها نلجأ في دراسة التقارب إلى بعض الاختبارات التي تصلح لجميع أنواع التكاملات المعتلّة :

❖ الاختبار الأوّل : ليكن لدينا الدّالتين $f(x)\geq 0$ و $g(x)\geq 0$ ، وتحقّقان المتراجحة $f(x)\geq g(x)\geq 0$ ، وذلك من أجل قيم $x\in[a,\infty[$، و كان التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً، فإن التكامل $\int_a^\infty g(x)dx$ يكون متقارباً أيضاً.

[1] متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2010-2011). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

❖ الاختبار الثاني: إذا كان $0 \le f(x) \le g(x)$، و ذلك من أجل كل x في المجال $[a,\infty[$، كان التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً، فإن التكامل $\int_a^\infty g(x)dx$ يكون متباعداً.

❖ الاختبار الثالث: يتعلّق هذا الاختبار بالدوال السالبة، أي $f(x) \le 0$ إذا تقارب التكامل $\int_a^\infty |f(x)|dx$ ،فإن التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب مطلقاً.

الباب الثاني

تكاملات أولر:[1]

يوجد الكثير من التوابع الغير قابلة للمكاملة بالطرق العادية المألوفة لذلك قام أولر ببرهان التكامل لتابعي بيتا و غاما حيث أصبح بإمكاننا إيجاد التكامل المعتل استناداً لتكاملات أولر ... لنتعرف إليها:

تكامل أولر من النوع الأول: (التابع بيتا)

يعرف التابع بيتا بالعلاقة الآتية:

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (4.1)$$

حيث a و b متغيري التابع.

ويسمى التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (4.1) بتكامل أولر من النوع الأول ويكون هذا التكامل متقارب من أجل $a > 0$ و $b > 0$ كما أنه متباعد من أجل $a \le 0$ و $b \le 0$.

[1] جوجة, د. غ. (2014). توابع خاصة. د. غ. جوجة.

خواص التابع بيتا:

- نفرض من العلاقة (4.1) أن:

$1-x=t \Rightarrow x=1-t \Rightarrow dx=-dt$ نعوض في (4.1) بعد ملاحظة أن:

$x=1 \Rightarrow t=0$ و $x=0 \Rightarrow t=1$

إذاً لدينا t يأخذ قيم من $1 \to 0$ ولكن لوجود الإشارة السالبة نقلب حدود التكامل فيكون لدينا:

$$\beta(a,b)=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt=\beta(b,a)$$

وبالتالي:

$$\beta(a,b)=\beta(b,a) \qquad (5.1)$$

إذاً التابع بيتا متناظر بالنسبة لوسيطيه a و b وهي الخاصة الأولى.

- لدينا: $\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

نفرض أن: $u=(1-x)^{b-1} \Rightarrow du=-(b-1)(1-x)^{b-2}dx$ و $dv=x^{a-1}dx \Rightarrow v=\frac{1}{a}x^a$

نعوض في دستور التجزئة:

$$\beta(a,b)=\frac{1}{a}(1-x)^{b-1}x^a\Big|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$\Rightarrow \beta(a,b)=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

وبالاستفادة من المطابقة:

$x^a \equiv x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$ وبالتعويض نحصل على:

$$\beta(a,b)=\frac{b-1}{a}\left[\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx-\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\right]$$

$$\Rightarrow \beta(a,b) = \frac{b-1}{a}\beta(a,b-1) - \frac{b-1}{a}\beta(a,b)$$

$$\Rightarrow (1+\frac{b-1}{a})\beta(a,b) = \frac{b-1}{a}\beta(a,b-1)$$

$$\Rightarrow (a+b-1)\beta(a,b) = (\mathrm{b}-1)\beta(a,b-1) \qquad (6.1)$$

وهي الخاصة الثانية.

- الخاصة الثالثة:

لدينا: $(a+b-1)\beta(a,b) = (\mathrm{b}-1)\beta(a,b-1)$

$$\beta(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}\beta(b,a-1) \qquad (7.1)$$

بالاختصار نجد:

$$(b-1)\beta(a,b-1) = (a-1)\beta(b,a-1) \qquad (8.1)$$

والآن لنضع التغيير:

$a-1 = p \Rightarrow a = 1+p$ و $b-1 = q \Rightarrow b = 1+q$

فتصبح المعادلة بالشكل:

$$q\beta(p+1,q) = p\beta(q+1,p)$$

$$\beta(p+1,q) = \frac{p}{q}\beta(q+1,p) \qquad (9.1)$$

من (10.1) ينتج لدينا: $\beta(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\beta(a,b-1)$

وبفرض أن $b = n$ عدد صحيح موجب فإن:

$$\beta(a,\mathrm{n}) = \frac{n-1}{a+n-1}\beta(a,n-1) ....(*)$$

فإذا استبدلنا في العلاقة (*) كل n بـ $n-1$ نحصل على:

$$\beta(a,\mathrm{n}-1)=\frac{n-2}{a+n-2}\beta(a,n-2)$$

ونستبدل في العلاقة (*) كل n بـ $n-2$ نحصل على:

$$\beta(a,n-2)=\frac{n-3}{a+n-3}\beta(a,n-3)$$

ونتوقف عند $n=2$ فنجد:

$$\beta(a,2)=\frac{1}{a+1}\beta(a,1)$$

وبتكرار هذه العملية $(n-1)$ مرة، وبضرب العلاقات السابقة طرفاً لطرف نجد:

$$\beta(a,n)=\frac{1}{a+1}.\frac{2}{a+2}........\frac{n-1}{a+n-1}\beta(a,1)$$

ولكن حسب التعريف:

$$\beta(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\left.\frac{x^a}{a}\right|_0^1=\frac{1}{a}\Rightarrow \text{نعوض}$$

$$\Rightarrow \beta(a,n)=\frac{1.2.3................(n-1)}{a(a+1)(a+2).......(a+n-1)}$$

$$\Rightarrow \beta(a,n)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2).....(a+n-1)} \qquad (11.1)$$

ولنفرض أن $a=m$ فتصبح العلاقة (12.1) بالشكل:

$$\beta(m,n)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2).....(m+n-1)}$$

وبضرب الطرف الأيمن بـ $(m-1)!$ بسطاً ومقاماً نجد:

$$\beta(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m-1)!m(m+1)(m+2).....(m+n-1)}$$

أي أن:

(13.1) $$\beta(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

- لنستنتج $\beta(a,a)$:

نفرض أن $a=b$ في العلاقة (14.1) عندئذٍ يكون لدينا:

$$\beta(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx; a>0$$

$$\beta(a,a)=\int_0^1 \left[x(1-x)\right]^{a-1}dx=\int_0^1 (x-x^2)^{a-1}dx$$

$$\beta(a,a)=\int_0^1 \left[\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x^2)\right]^{a-1}dx$$

$$\beta(a,a)=2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x^2)\right]^{a-1}dx$$

"لأن التابع $y=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2$ قطع مكافئ محوره التناظري هو $x=\frac{1}{2}$ "

ونفرض أن:

$$\frac{1}{2}-x=\frac{\sqrt{t}}{2}\Rightarrow dx=\frac{-dt}{4\sqrt{t}}$$

وبالتالي: $$\beta(a,a)=\frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{1}{4}-\frac{t}{4})^{a-1}.t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$\beta(a,a)=\frac{1}{2a-1}\int_0^1 (1-t)^{a-1}.t^{-\frac{1}{2}+1-1}dt$$

(15.1) $$\beta(a,a)=\frac{1}{2a-1}\beta(\frac{1}{2},a)$$

لدينا العلاقة (16.1) : $$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

نفرض أن
$$x=\frac{y}{y+1}\Rightarrow dx=\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$1-x=1-\frac{y}{y+1}=\frac{1}{y+1}$$

وحدود التكامل:

$$x=0\Rightarrow y=1$$

$$x=1\Rightarrow y=\infty$$

نعوض فنجد:

$$\beta(a,b)=\int_0^\infty (\frac{y}{1+y})^{a-1}\frac{1}{(1+y)^{b-1}}\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

$$\beta(a,b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a-1}}\frac{1}{(1+y)^{b-1}}\frac{1}{(1+y)^2}dy$$

$$\beta(a,b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$$

أي أن:

$$\beta(a,b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy \qquad (17.1)$$

تكامل أولر من النوع الثاني:(التابع غاما)

يعرف التابع غاما بالشكل الآتي:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx;a>0 \qquad (18.1)$$

نسمي التكامل من الطرف الأيمن للعلاقة (19.1) بتكامل أولر من النوع الثاني ويتقارب هذا التكامل إذا كان $a>0$.

خواص التابع غاما:

- الخاصة الأولى: $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$

البرهان:

لدينا:
$$\Gamma(a+1)=\int_{0}^{\infty}x^{a}e^{-x}dx$$

نفرض أن:
$$u=x^{a}\Rightarrow du=ax^{a-1}dx$$
$$dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$$

نعوض في دستور التجزئة:

$$\Gamma(a+1)=-x^{a}\,e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}+a\int_{0}^{\infty}x^{a-1}e^{-x}$$
$$=0+a\Gamma(a)=a\Gamma(a)$$

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a) \qquad (20.1)$$

وهي العلاقة الأساسية للتابع الغماوي.

ومن العلاقة (21.1) يمكن التأكد بسهولة أن $\Gamma(1)=1$.

- الخاصة الثانية:

لنفرض أن $a=n$ عدد صحيح موجب وبتطبيق العلاقة الأساسية للتابع الغماوي n مرة متتالية نحصل على:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$
$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$\Gamma(n-1)=(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)$$
$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$$
$$\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!\Gamma(1)=n!$$

إذاً:

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (22.1)$$

- الخاصة الثالثة:

لدينا من العلاقة(23.1) :

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx; a>0 \qquad (24.1)$$

نستبدل كل x بـ ty فنجد:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} t^{a-1}y^{a-1}e^{-ty}tdy$$

$$\Rightarrow \Gamma(a+b)=\int_0^{\infty} t^{a+b}y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy$$

حيث أننا قمنا بتبديل كل a بـ$a+b$ وبدلنا كل t بـ $t+1$.

وبالتالي:
$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy$$

وبضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ t^{a-1} وبالمكاملة بالنسبة لـ t (باعتبار t متحولاً)من $\infty \to 0$ فنحصل على:

$$\Gamma(a+b)\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_0^{\infty}t^{a-1}\left[\int_0^{\infty}y^{a+b-1}e^{-ty}e^{-y}dy\right]dt$$

نبادل بين موضعي التكامل في الطرف الأيمن ثم نضرب التابع المستكمل بـ y^a ونقسمه على y^a فنجد:

$$\Gamma(a+b)\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_0^{\infty}(ty)^{a-1}e^{-ty}d(ty)\int_0^{\infty}y^{b-1}e^{-y}dy$$

وبما أن:
$$\beta(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$

فبالتالي:

$$\Gamma(a+b).\beta(a,b)=\int_0^\infty (ty)^{a-1}e^{-ty}d(ty)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy$$

$$=\int_0^\infty \Gamma(a)\,\mathrm{y}^{b-1}\,e^{-y}dy$$

$$=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy=\Gamma(a)\Gamma(b)$$

إذاً :

$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (25.1)$$

وهي العلاقة الأساسية التي تربط بين التابع بيتا والتابع غاما.

ونجد أن لهذه التكاملات استعمالات هامة وخاصة في حساب التكاملات المحددة التي يصعب حسابها بالطرق المألوفة.

مثال(1):

أوجد قيمة التكامل المعتل: $\int_0^\infty x^3e^{-x}dx$

الحل:

استناداً إلى تعريف التابع غاما نجد أن:

$$\int_0^\infty x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$$

مثال(2):

احسب التكامل: $\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx$

الحل:

هنا نجري تغييراً في المتحول $x=\frac{y}{2}$ فنحصل على:

$$\frac{1}{2^7}\int_0^\infty y^6 e^{-y}dy = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

النتائج :

- ✓ تعرفنا إلى إمكانية إجراء مكاملة لتكامل أحد طرفيه أوكلاهما يسعى إلى ∞ .
- ✓ تعرفنا إلى إمكانية إجراء تكامل للتوابع المنقطعة في أحد طرفي مجال تعريفها أو كليهما أو نقطة ضمن هذا المجال.
- ✓ تعرفنا إلى تكاملات أولر و توظيفها في حساب التكاملات المحددة التي يصعب حسابها بالطرق المألوفة.

الخاتمة:

وهكذا نكون توصلنا في نهاية هذا البحث إلى شرح بسيط للتكامل غير المحدد والمحدد وصولاً للتكاملات المعتلة، فتطرقنا بالحديث عن خواصها و اختبارات تقاربها، إلا أن موضوع التكامل موضوع واسع و كبير لا يمكننا إعطاؤه حقه في بحثٍ صغير...

المصادر والمراجع:

الغصين, د. أ. (1993-1994). التحليل(3). جامعة تشرين, كلية العلوم.

جوجة, د. غ. (2014). تكاملات معتلة. تكاملات معتلة. د. غ. جوجة.

جوجة, د. غ. (2014). توابع خاصة. د. غ. جوجة.

متيلج, د. م. ع. س. ب. د. ع. (2010-2011). الرياضيات (2). جامعة تشرين, كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية.

يعقوب, د. ع. ا ي. أ. خ. ق. أ. س. (2007-2008). التكامل. جامعة تشرين, كلية العلوم.

فهرس الأشكال:

المحتويات