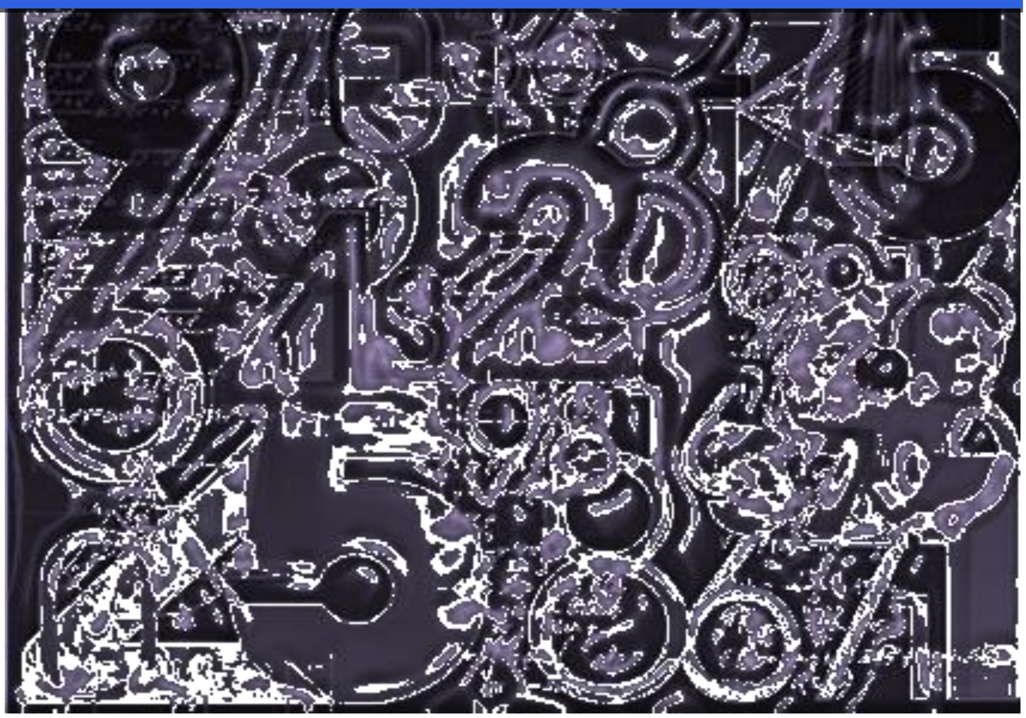
المركز الوطني للمتميزين

The National Centre for the Distinguished

أشهر الحدسيّات في نظريّة الأعداد الأوّليّة



تقديم: الكوثر حسين.

الصف: الثاني عشر.

المقرر: رياضيات.

العام الدّراسيّ: 2016-2017.

إشراف: الآنسة يمار حموي.

المقدّمة

العدد لغة العلم، والحساب أو نظرية الأعداد هو علم العدد، جانبه النظري يعالج الأرقام والأعداد، مراتبها والنسب التي بينها وتكرارها على نسق معين، أنواعها وكيفية بنائها ودراسة خواصها والعلاقات بينها، وجانبه العلمي يتناول الحساب، معرفة المطلوب بالعمليات الأربعة.

جاء عن ابن سراقة أنّ الحساب علم قديم فوائده كبيرة، منها ما هو في الميقات من حساب الأعوام والأشهر والأيام وحركات الشمس في البروج والكواكب وحلول القمر في المنازل المقدرة له ومعرفة الساعات وغير ذلك، ومنها في علم الفقه وعلم الفرائض.. ولأهمية علم الحساب في حياة الإنسان اليومية جعله الجاحظ يشمل معانٍ كثيرة ومنافع جليلة.

بدأ الاستقراء الرياضي مع الكرخي لأنه أول من أثبت بالاستقراء الرياضي أنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left\{\sum_{i=1}^{n} i\right\}^2 , \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

أما كل من الحسن ابن الهيثم والسّموءل المغربي وابن البنا المراكشي، فقد أثبت تلك العلاقات بطرق مختلفة.

أما العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

فقد أثبتت من قبل كل من أبو جعفر القبيصي ؛ أحد رياضيي القرن 10م؛ وأبو منصور عبد القادر البغدادي والحسن بن الهيثم وغياث الدين الكاشي. أما قاعدة الترتيب الجيد فقد وضعت من قبل كل من كانتور وزرملّو كإحدى طرق البرهان المكافئة للاستقراء الرياضي من جهة ، ولمسلّمة الاختيار من جهة أخرى.

قدم غاوس مفهوماً آخر للقسمة من خلال التطابقات عام 1801م بطريقة جعلتها أداة فعالة لتسهيل البراهين ووسيلة أخرى لدراسة نظرية الأعداد، ثم قانون التعاكس

لغاوس والذي خمنه أويلر سنة 1742م وبرهن جزئيا من قبل لجندر سنة 1785م ثم أثبت من قبل غاوس سنة 1796م ونشر سنة 1801م.

كما ورد في أبحاث أويلر عام 1773م ولجندر عام 1785م وغاوس عام 1796م الجذور البدائية.

وجدير بالذكر المعادلات الديوفنتية التي بدأت مع ديوفنتس وطورت من قبل ابن أسلم المصري والكرخي والسموءل المغربي والسجزي ثم فيرما وأويلر.

أما المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ وثلاثية فيثاغورث أو ما يسمى المثلثات العددية قائمة الزاوية، فقد بدأت مع البابليين والمصريين، ثم فيثاغورث، أبو جعفر الخازن أحد رياضيي القرن 10م.

وقد ظهر في أبحاث الإيطاليين بمبللي سنة 1572م، كتالدي سنة 1613م، الإنكليزي جون ويلس سنة 1653م وأويلر ولاغرانج وغاوس دراسات عن الكسور المستمرة التي تبرز أهميتها في كثرة تطبيقاتها وعلاقتها بالأعداد الحقيقة.

ولكن..

هناك العديد من الأمور التي تنبّأ بها العلماء ولم يستطيعوا برهانها :

- ما أشهر هذه الحدسيات؟
- ما آخر محاولات العلماء لبرهانها؟
- هل تمّ برهان أيّ منها بعد سنوات عدّة أم أنها بقيت مبهمة؟
- هل يمكننا تجديد براهينها بطرق أبسط؟

الباب الأول: مفهوم الحدسية

الفصل الأول: تذكير بمفهوم الأعداد الأولية

- **تعريف:[1] [2]-**

1. العدد الأوّلي:

" لطالما أذهلت الأعداد الأولية الرياضيين. تظهر بين الأعداد الحقيقية بشكل قد يبدو عشوائيّاً، ولكنها بشكل لم يتم برهانه، هناك ترتيب معين غير واضح، بعيد قليلاً عنّا.."

أندرو دودلي (1978)[3]

تعتبر الأعداد الأولية إحدى مشاكل نظرية الأعداد التي أعجزت عقول خيرة علماء الرياضيات حيث لا يمكن التنبؤ بها، أي لم تكتشف بعد القوانين التي تتحكم في ظهورها..

و الأعداد الأولية هي التي لا يمكن تحليلها في صورة حاصل ضرب عددين أو أكثر ، ولذلك تسمى أولية ، مثل 2,3,5,7,11,13.

بينما العدد 12 مثلاً يعتبر عدد غير أولي إذ يمكن تحليله إلى $2\times3\times2$.

أو يمكن تعريفها:

يقال لأي عدد ينتمي للمجموعة N^* أنه عدد أولي إذا كان لا يقبل القسمة إلا على الواحد ونفسه..

2. العددان الأوليّان فيما بينهما:

يقال عن عددين n ,m أنهما أوليان فيما بينهما إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1.

---

[1]- مقالة "موسيقا الأعداد الأولية " من الموقع http://www.faculty.qu.edu.sa/29377/Pages/%D9%85%D9%88%D8%B3%D9%8A%D9%82%D9%89-%D8%A7%D9%84%D8%A3%D8%B9%D8%AF%D8%A7%D8%AF-%D8%A7%D9%84%D8%A3%D9%88%D9%84%D9%8A%D8%A9.aspx
وسمّيت موسيقا الأعداد الأولية لتشابه عمل ريمان بالموسيقا.

[2] مقدمة في نظرية الأعداد – أ.د.فالح بن عمران بن محمد الدوسري – قسم العلوم الرياضية في كلية العلوم التطبيقية في جامعة أم القرى بمكة المكرمة- الطبعة الأولى للكتاب(1428هـ - 2007 م)- صـ42

[3] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.1

الفصل الثاني: مفهوم الحدسيّة

" نظرية الأعداد، أكثر من أيّ فرع من فروع الرياضيات الأصيلة، قد بدأت بكونها علماً تجريبيّاً. وأشهر نظرياتها قد تمّ التنبؤ بها، بعضها طرحت براهينها عن طريق بعض الحسابات بعد عناء لمئات السنين"

-G.H.Hardy[4]

A. تعريف: [5]

أحد مميزات الأعداد الأولية هو ظهورها بشكل غير منتظم حتى تكاد تبلغ العشوائية، مما دفع الرياضيين ؛المحترفين والهاوين؛ لاقتراح المزيد والمزيد من المشكلات والحدسيات التي سميت أشهرها بأسماء المتنبئين بها.

B. مفهوم الحدسيّة معجميّاً : [6]

- حدسيّ (اسم): منسوب إلى الحدس.
- فهم حدسيّ: فهم جاء نتيجة شعور داخلي أو تنبؤ غريزي.
- الحدسيّات: القضايا التي تدرك على بالاعتماد على الحدس.

---

[4] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.49

[5] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.49

[6] المعجم الوسيط

الباب الثاني: أهم الحدسيّات التي حيّرت البشرية منذ الأزل..[7]

نظراً لأهمية الأعداد الأولية في تطبيقاتها الهندسية من جهة، واعتبارها حجر الأساس في بناء الأعداد الصحيحة من جهة أخرى وضع العلماء حدسيات كثيرة عليها لم تبرهن حتى يومنا هذا.

نذكر منها:

الفصل الأول: حدسيّة غولدباخ القوية (1690 - 1764) عام 1742م [8] - [9]

عام 1741م تنبأ غولدباخ بأشهر حدسياته والتي تنصّ على:

" يمكن التعبير عن أي عدد صحيح زوجي كمجموع عددين أوليين "ولكنها حاليّاً أصبحت: " يمكن التعبير عن أي عدد صحيح زوجي أكبر من 2 كمجموع عددين أوليين " باعتبار 1 عدد غير أوّلي كما كان في زمان غولدباخ.

أما حدسية غولدباخ الضعيفة فتنص على:

" كل عدد فردي أكبر من 7 يمكن أن يعّبر عنه كمجموع لثلاثة أعداد أولية فردية"

ودعيت هذه الحدسية بالضعيفة لأنه إذا برهنت حدسية غولدباخ القوية صارت هذه الحدسية صحيحة أيضا وذلك لأنه إذا كان أي عدد زوجي أكبر من أو يساوي 4 مساويا لمجموع عددين أوليين، فإنه يكفي إضافة 3 لهذا العدد الزوجي من أجل الحصول على الأعداد الفردية الأكبر من 7 جميعها. [10]

حتى الآن، لا يوجد برهان لحدس غولدباخ رغم أنّ هذه الحدسية تحققت لكمية هائلة من الأرقام باستعمال العمليات الحسابية.

---

[7] مقدمة في نظرية الأعداد – أ.د.فالح بن عمران بن محمد الدوسري – قسم العلوم الرياضية في كلية العلوم التطبيقية في جامعة أم القرى بمكة المكرمة- الطبعة الأولى للكتاب(1428هـ - 2007 م)- من ص42

[8] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.114

[9] Two approaches to proving Goldbach's Conjecture by :Bernard Farley – advised by: Charles Parry – May 3rd 2005

[10] The 1621 edition of Diophantus' Arithmetica, translated into Latin by Claude Gaspard Bachet de Méziriac

مثلاً:

6=3+3

10=3+7

قادت دراسة حدسية غولدباخ لإنجازات عظيمة منذ 1920م . فمثلاً؛ فينوغرادوف أثبت عام 1937م أنّ كلّ عدد فردي كبير يمكن التعبير عنه بمجموع ثلاثة أعداد أولية. أيضاً، التحقيق في حدسية غولدباخ حضّ على تطوّر العديد من مناهج نظريات الأعداد الهامة في نظرية الأعداد والعديد من المجالات الرياضية الأخرى.

عام 1900م، ألقى عالم الرياضيات هيلبرت خطاباً هاماً في الكونغرس الدولي الثاني للرياضيات الذي عقد في باريس حيث طرحت فيه 23 مشكلة رياضية في القرن العشرين كانت حدسية غولدباخ أحدها. ثم عام 1921م، قال هاردي أنّ حدسية غولدباخ ليست فقط م أشهر وأعقد الحدسيات في نظرية الأعداد ولكن في الرياضيات كلها!

أثبت كل من العالمين هاردي وليتلوود أنّ جميع الأعداد الحقيقية الكبيرة هي مجموع لثلاثة أعداد أولية وأنّ غالبية الأعداد الحقيقية هي مجموع عددين أوليين.

عام 1919م ، أثبت النرويجي برون أنّ كل عدد زوجي كبير هو مجموع رقمين لكل منهما تسع عوامل أولية على الأكثر.

عام 1930م، أثبت الروسي سكنرلمان أنّ كل عدد حقيقي ضخم هو مجموع c من الأعداد الأولية بحيث c عدد ثابت.

عام 1937م ، استطاع الروسي فينوغرادوف أن يلغي الاعتماد على فرضية ريمان الكبرى وبذلك وفّر إثباتات تامّة غير مشروطة لاكتشافات هاردي وليتلوود.

وأخيراً؛ بعد إثبات منهج برون ونتيجته؛ توصل الصيني شين جينغ رون لأنّ كل عدد حقيقي زوجي ضخم هو حاصل جمع عدد أولي و عدد ناتج من عددين أوليين على الأكثر عام 1966م.

حتى يكتسب الكتاب *Uncle Petros وحدسية غولدباخ* الشهرة والذي كتبه أبوستولوس دوكسيادس، عرض الناشر البريطاني طوني فابر جائزة بقيمة 1000000 دولار لمن يبرهن الحدسية قبل ابريل 2002، لكن لم يحصل عليها أحد.

تم برهان حدسية غولدباخ الضعيفة عام 2013 م ولكن حتى الآن لم يستطع أحد برهان الحدسية القوية .[11]

[11] Wolfram demonstration project- 2007- by Hector Zenil

الفصل الثاني: حدسية التوأمين الأوليين[12] - [13]

❖ تعريف:

التوأمين الأوليين: زوج من الأعداد الأولية من الشكل (p, p+2) . وأطلق هذا الاسم عليها من قبل بول ستاكل (1862- 1919م).

تنصّ حدسية التوأمين الأوليين على:

" يوجد عدد لا نهائي من التوائم الأولية على الشكل (p,p+2) بحيث p عدد أولي وإذا وفقط إذا تحقق :

$$4((n-1)!+1)+n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

مثلاً:

(17,19) (11,13) (3,5)

❖ أكبر زوج للتوأمين الأوليين:

في 15 كانون الثاني عام 2007م ، اثنتان من الإحصائيات المنشورة (Twin Prime Search, Prime Grid) وجدتا أكبر زوج لتوأمين أوليين $2003663613.2^{195000} \pm 1$ حيث يملك هذا الرقم 58711 منزلة عشرية. وكان مكتشفهما إريك فوتيير الفرنسي.
6 آب عام 2009م أعلنت الإحصائيتان نفسهما ع رقم قياسي جديد هو $65516468355.2^{333333} \pm 1$ حيث يحوي 100355 منزلة عشرية .
25 كانون الأول عام 2011م أعلنت PrimeGrid عن رقم قياسي جديد ألا وهو $3756801695685.2^{666669} \pm 1$ حيث يحوي 200700 منزلة عشرية.

❖ آخر التطورات فيما يخص هذه الحدسية: [14]

في السابع عشر من نيسان عام 2013 وصلت ورقة لبريد (سجلات تاريخ الرياضيات)؛ إحدى أهم وأبرز الصحف؛ تحمل محاولة من (يتانغ زانغ) لحل هذه الحدسية.

---

[12] Twin primers conjecture proof- Shubhankar Paul(Passed BE in Electrical Engineering from Jadavpur University in 2007. Worked at IBM for manual tester with designation Application Consultant. Worked in 3 years and 4 months as IIT Bombay for 3 months as JRF) - International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR) - ISSN: 2321-0869, Volume-1, Issue-8, October 2013 -www.erpublication.org

[13] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.229+p.230

[14] https://www.quantamagazine.org/20131119-together-and-alone-closing-the-prime-gap/

الفصل الثالث: حدسية دورين أندريكا [15]

و تنصّ الحدسيّة على:

" إذا كان p_1,p_2 عددين أوليين متتاليين فإنّ:

$$1 > \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$$ مهما يكن n"

تدور هذه الحدسية حول الفروق بين الأعداد الأولية ولم تبرهن حتى يومنا هذا .

مثلاً:

$$\sqrt{19} - \sqrt{17} = 0.2357933179 < 1$$

إنّ أكبر فرق بين جذريّ توأمين أوليين هي:

$$\sqrt{11} - \sqrt{7} = 0.670873 < 1$$

وقد تم حسابها باستخدام الحاسوب.

استعمل عمران جوري المعلومات حول الفروق بين الأعداد الأولية واستطاع برهنة الحدسية حتى $1.3002 \,.\, 10^{16}$.

[15] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.13

الفصل الرابع. حدسية بروكارد:[16]

توقع بروكارد عام 1904 أنّ الحلول الوحيدة للمعادلة: $n! + 1 = m^2$ هي: n= 4,5,7

أحد حدسيات بروكارد الأخرى هي:

" يوجد على الأقل أربعة أعداد أولية بين مربعيّ أيّ عددين متتاليين ما عدا 2 و3 ".

و ترتبط هذه الحدسية بحدسية شينزل التي تقول:

" إذا كان x أكبر من 8 فيوجد عدد أوّلي بين x و $x + (\log x)^2$".

كانت آخر المحاولات لحل حدسية كل من أندريكا وبروكارد في الثاني من نيسان عام 2014 وصدرت بمقال لجيرمان أندريه باز وذلك عن طريق إثباته لأنه في حال إثبات صحة الحدسية (إذا كان n عدداً حقيقياً موجباً يدل على الأعداد الحقيقية المتتابعة المحصورة بين n^2 و $(n+1)^2$ فيوجد على الأقل بين هذه الأعداد الحقيقية عدد أولي واحد) تكون كل من الحدسيتين صحيحتان.[17]

[16] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.22

[17] On Legender's, Brocard's, Andrica's, and Oppermann's Conjectures – Germ´an André's Paz- Instituto de Educaci´on Superior N.28 Olga Cossettini (2000) Rosario, Santa Fe, Argentina

الباب الثالث: بعد عدة محاولات..

هناك العديد من الحدسيات التي تم برهانها بعد زمن طويل فتحوّلت لمبرهنات نذكر منها:

الفصل الأول: مبرهنة فيرما الأخيرة [18]-[19]

تنص مبرهنة العالم الفرنسي فيرما(1601 - 1665) على عدم وجود أعداد صحيحة غير صفرية x,y,z تحقق المعادلة الديوفنتية وقد قدمها لنا عام 1643 م:

$$x^n + y^n = z^n$$

- محاولات بعض العلماء لحل هذه المبرهنة:

يقول فيرما أنه قد تنبأ بحدسيّته سنة 1637 م عندما كان يقرأ طبعة باشيه لأعمال ديوفنتس وادّعى أنّ لديه إثبات لذلك لكنّ ضيق الهامش منعه من كتابته، ولكنّ جميع الأبحاث في التراث العربي و الإسلامي تؤكد بأن الرياضيين المسلمين كانوا على علم بهذه المبرهنة عندما n=3,4، فمنذ القرن العاشر للميلاد حاول كل من أبو بكر الكرخي وأبو محمود الخندجي إثبات هذه المبرهنة عندما n=3 أي عدم وجود أعداد صحيحة غير صفرية x,y,z بحيث " لا يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب"

ولكن أبو جعفر الخازن أحد رياضيي القرن العاشر للميلاد يؤكد بأنّ برهان الخندجي ناقص وغير صحيح، ثم يحاول الخازن أن يبرهن القضية الآتية:

"لا يمكن أن يجتمع من عددين مكعبين عدد مكعب كما قد يمكن أن يجتمع من عددين مربعين عدد مربع، ولا أن ينقسم عدد مكعب لعددين مكعبين، كما قد ينقسم عدد مربع لعددين مربعين" ويبدأ برهانه بإثبات المتطابقة الآتية:

لأجل كل عددين مكعبين، فإنّ فضل ما بينهما هو الذي يجتمع من ضرب مربع الضلع الأقل في فضل ما بين الضلعين ومن ضرب مجموع الضلعين في فضل ما بينهما ثم في الضلع الأكبر.

أي أنه إذا كان z>y فإنّ :

$$\mathrm{z}^3 - \mathrm{y}^3 = \mathrm{y}^2(\mathrm{z}-\mathrm{y}) + (\mathrm{z}+\mathrm{y})(\mathrm{z}-\mathrm{y})\mathrm{z} \quad (1)$$

[18] مقدمة في نظرية الأعداد – أ.د.فالح بن عمران بن محمد الدوسري – قسم العلوم الرياضية في كلية العلوم التطبيقية في جامعة أم القرى بمكة المكرمة- الطبعة الأولى للكتاب(1428هـ - 2007 م)- من صـ253 وحتى صـ258

[19] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.104

بحيث أنّ الطرف الأيمن من المتطابقة يقابله حجم لكنه ليس مكعّباَ لأنه لم يجتمع من ضرب عدد مربع في ضلعه، إذ لا ينقسم عدد مكعب لعددين مكعبين لأنه:

إذا فرضنا وجود عددين مكعبين ضلعاهما |ab| و |bc| وكان:

- |bc|>|ab|.
- |bc|+|ab|= |bd|.

فإنّ:

|bd| > |bc|

إذاَ:

إذا كان ضلع مكعب فإنه إذا نقص من مكعبه مكعب بقي منه مكعب ، ولكن: الفرق بين مكعبين ليس مكعباّ كما أوضحنا أعلاه بالتالي:

ليس ضلع مكعب ولا مجموع مكعبي|ab| و |bc|بعدد مكعّب.

لاحظ:

إنّ برهان الخازن ناقص أيضاَ واعتماده على التعليل الهندسي للمتطابقة (1) لا يؤدي إلى التعميم لأنّ الحالة n=4 لا يمكن إعطاؤها تفسيراَ هندسيّاَ.

في القرن الحادي عشر ميلادي فقد ذكر ابن سينا (980 – 1037 م) في كتابه " الشفاء: المنطق – البرهان " أنّ العلاقة: لم يتم البرهان عليها، أما في القرن الثاني عشر للميلاد فقد ذكر عمر الخيام (1048 – 1131 م) دون إثبات استحالة وجود أعداد صحيحة غير صفرية x,y,z بحيث:

$$x^4 + y^4 = z^4 \text{ أو } x^3 + y^3 = z^3$$

أما في القرن الثالث عشر للميلاد فقد طرح ابن الخوام البغدادي (1245 – 1324 م) بعض المعادلات الديوفنتية التي تضمّنت معادلة فيرما عندما n=3 ، وكذلك فعل كمال الدين الفارسي في شرحه لجبر ابن الخوام ، أما بهاء الدين العاملي (1547 – 1622 م) فقد ذكر في كتابه " خلاصة الحساب " استحالة تقسيم المكعب لمكعبين أو ضعف المربع لمربعين، وقد جاءت ملاحظة فيرما بعد وفاة العاملي بحوالي خمسة عشر عاماَ.

هذا ولقد أثبت فيرما...

، كما أثبت كل من أويلر (1707 – 1783 م) وغاوس (1777 – 1855 م) عدم وجود حل غير تافه في Z(حل تافه: حل مغاير للصفر) للمعادلة:

$$x^4 + y^4 = z^4$$

بحيث x,y,z أعداد تغاير الصفر.

وعليه:

إذا كان$n>2$ و$4|n$ فإنّ: $n=4m$ وبالتالي فإنّ:

$$x^n + y^n = z^n \Leftrightarrow (x^m)^4 + (y^m)^4 = (z^m)^4$$

لكن:

$(x^m)^4 + (y^m)^4 = (z^m)^4$ لا تملك حلاً غير تافه في Z .

إذاً:

$x^n + y^n = z^n$ لا تملك حلاً في Z لكل (n=4m) بشرط x,y,z أعداد تغاير الصفر.

أما إذا كان n=3 ، فقد أثبت أويلر سنة 1770م صحة المبرهنة في هذه الحالة، لكنّ إثبات أويلر يحوي بعض الأخطاء التي صححها لجندر (1753 – 1833 م) وأثبت غاوس (1777 – 1855 م) هذه الحالة باستخدام خواص الحقل Q (i)(وهو الحقل الناتج عن ضم العدد العقدي إلى الأعداد العادية وتكون عناصره من الشكل(a+ib) بحيث a,b أعداد عادية)، أما الفرنسية صوفي جرمين (1776 – 1831 م) فقد أثبتت سنة 1820م صحة المبرهنة لكل n<100بشرط أنّ كلاً من n, 2n+1 عدد أولي، كما أنّ كلاً منx,y,z لا يقبل القسمة على nثم وسع لجندر طريقتها لكل الأعداد الأقل من 197 وأثبت عام 1823م أنّ n لا يمكن أن تكون على الصورة:

p+1, 3p+1, 8p+1, 10p+1, 14p+1, 16p+12

حيث n,p أعداد أولية و n مغاير لـ 31، 43.

و أثبت الألماني ديركلي (1805 – 1859 م) سنة 1828م صحة المبرهنة عندما n=5 كما أثبت لجندر ذلك سنة 1830م،وأثبت ديركلي عام 1832م صحة المبرهنة عندما n=14، وفي سنة 1839م قد الفرنسي لامي (1795 – 1870 م) برهاناً عندما n=7 لكنه يحوي بعض الأخطاء صححت من قبل الفرنسي لبيك (1875 – 1941 م) سنة 1840م وفي 1\3\1874 أبلغ لامي أكاديمية العلوم الفرنسية في باريس أنه أثبت مبرهنة فيرما لكنّ الفرنسي ليوفيلي لم يقتنع ببرهان لامي وبعد عدة أشهر اكتشف الفرنسي كوشي (1789 – 1857 م) خطأ للعالم لامي.

هذا وقد أثبت الألماني كومر (1810 – 1893 م) صحة مبرهنة فيرما الأخيرة لكل الأعداد الأولية المنتظمة الأقل من 100 ما عدا (37، 59، 67) وقد منح كومر على ذلك الميدالية الذهبية من قبل أكاديمية العلوم الفرنسية سنة 1850م.

وأثبت الروسي فيريمانوف سنة 1893م صحة مبرهنة فيرما عندما n=37 ثم أثبت سنة 1955م صحة تلك المبرهنة لكل n.

وأثبت فايفرش في 1909م أنه إذا وجد حل للمعادلة

بحيث كل من: x,y,z لا يقبل القسمة على n (والتي تدعى الحالة الأولى من مبرهنة فيرما) فإنّ:

$$2^n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ n^2)$$ و n عدد أولي

ثم أثبت كل من ميريمانوف و فروبينيص وفانديفر وبولكزك وموريشيما وروسر أنه إذا وجد للحالة الأولى من مبرهنة فيرما الأخيرة فإنّ:

$$q = 3,5,7,11,17,19\ 23,29,31,37,41,43 \text{ ، } q^n \equiv q\ (\mathrm{mod}\ n^2)$$

وباستخدام تلك النتائج أثبت الفرنسي لمير صحة الحالة الأولى من مبرهنة فيرما الأخيرة لكل الأعداد الأولية الأقل من 253747889.

وفي سنة 1955 وضع اليابانيان شيمورا وتانياما تخميناً (TaniyamaConjecture – Shimura)حول المنحنيات الجبرية الأهليلجية أو الناقصة (وهي منحنيات من الشكل $y^2 = x^3 + Ax + B$ بحيث A,B من C مجموعة الأعداد العقدية).

وفي سنة 1983م أثبت فلاتنغز أنّ لكل n>2 يوجد على الأكثر عدد منتهي من الأعداد الأولية نسبيّاً مع x,y,z بحيث:

$$x^n + y^n = z^n$$

وعام 1987م بيّن العالم الفرنسي سار تكافؤ تخمين شيمورا – تانياما مع مبرهنة فيرما الأخيرة.

أثبت الإنجليزي أندرو ويلس صحة حدس شيمورا – تانياما ، وأثبت صحته بصورة عامة ريبت من بركلي سنة 1999م، وفي سنة 1994م وبمساعدة الإنجليزي تيلور من كامبرج (R.Taylor) .

عام 1995م أثبت ويلز صحة تخمين تانياما شيمورا وبذلك أثبت فيرما ومُنِحَ على ذلك ميدالية فيلد في الرياضيات سنة 1995م. كما أعلنتْ الأكاديميةُ النرويجية للعلومِ والآداب في 15 من آذار عام 2016م عن منحِ جائزةِ آبيل* لـ سير أندرو ويلز والتي يعتبرُها البعض جائزةَ نوبل

للرياضيات وتلقى مبلغاً قدره 6 ملايين كورونا (ما يقارب 700000 دولار أمريكي) بعد أن أوجدَ حلاً لمسألة استعصت على العلماءِ لثلاثة قرون ونصف .

الفصل الثاني: مبرهنة الأعداد الأولية[20]

كم عدد أولي يوجد؟

لقد حاول أفضل العلماء للاقتراب من جواب هذا السؤال بدقة..

ندلّ على عدد الأعداد الأولية الأقل أو يساوي n بـ $\pi(\mathrm{n})$ مع التنويه لعدم وجود رابط بين $\pi(\mathrm{n})$ في والثابت π الذي يتعلق بالدائرة.

إنّ جميع الأعداد الأولية ماعدا 2 و3 من الشكل (6n±1)، يمكننا القول: بالمجمل ثلث الأعداد هو أعداد أولية، ولكن هناك مبالغة في تقدير المجموع الإجمالي فبالملاحظة أننا يمكن كتابة الأعداد الأولية بالشكل: (30n±1,7,11,13)تكون النسبة 26.66%، ولكن هذا التقدير ضعيف أيضاً، لأنّ عدد الأعداد الأولية ينقص كلما ابتعدنا أكثر ولكنّ هذه النسبة تبقى نفسها.

تنصّ نظريّة الأعداد الأوّليّة على:

كلما ازداد n فإنّ $\pi(\mathrm{n})$ تسعى مقتربة إلى $n/\ln n$ *التي تقترب من 1 عندما تسعى n إلى ما لا نهاية.*

نلاحظ أنّ: $\pi(\mathrm{n}) \sim \mathrm{n}/\ln n$ ، وهذا تخمين مذهل، لكنّه ليس الأفضل: لأنه أيضا صعب الإثبات.

إنّ تقريب$\mathrm{n}/\log n$ إلى $\pi(\mathrm{n})$أيضاً يعني: من 1 إلى n فإنّ تقريبا جميعها أولية.

يمكننا أيضاً القول أنّ إمكانية وجود رقم عشوائي أولي بين 1 و n هي $\mathrm{n}/\ln n$تقريباً .

هذا أيضاً يعني أنّ الفجوة الوسطية بين عددين أوليين متتاليين قرب الرقم n تساوي(n) ln تقريباً .

وهكذا، عندما يكون n حوالي 100 يكون ln (n) تقريبا 4.6 .

- **تاريخ:**

كان لجندر أول من طبع نظرية الأعداد حيث ادّعى في كتابه (Essai sur la Théorie des Nombres) عام 1798م أنّ $\pi(x)$ تساوي تقريباً $x/(\ln x - 1.08366)$.

---

[20] prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc- p.181

* جائزة آبيل: تمنح جائزة آبيل من قبلِ الأكاديميةِ النرويجيةِ للعلوم والآداب .ويستند اختيارُ الفائز بناء على توصية من قبل لجنة آبيل، والمؤلفة من خمسة علماء رياضيات معترف بهم دولياً .

وأعضاء اللجنة الحالية هم

(John Rognes رئيس اللجنة ، Rahul Pandharipande، Éva Tardos، Luigi Ambrosio، .Marta Sanz-Solé)

و تمول جائزة آبيل والفعاليات المصاحبة من قبل الحكومة النرويجية.

وبعد فترة طويلة قام تشيبايتشف عام 1851م بإثبات أنّه إذا كان لـ $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ نهاية فلا بدّ أن تكون 1 رغم أنّه لم يكن قادراً على القيام بالخطوة الأخيرة وإثبات أنّ المهاية موجودة. بعد عام، أثبت أنه إذا كان n كبيراً بما يكفي فإنّ:

$$\frac{(\mathbf{0.92}\ldots)\boldsymbol{x}}{\mathbf{log}\,\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) < \frac{(\mathbf{1.105}\ldots)\boldsymbol{x}}{\mathbf{log}\,\boldsymbol{x}}$$

وقد قام دي لا فاليي بوسين (1866- 1962م) و جاكيس هادامارد (1865- 1963 م) (وبالصدفة أكبر عالمي رياضيات في العالم فقد عاشا عمراً طويلاً) بالخطوة الأخيرة وأثبتا صحة كلام تشيبايتشف.

الفصل الثالث: مبرهنة لجندر [21]-[22]

وتنص على:

لا توجد كثيرة حدود من الشكل $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c$ تعطي الأعداد الأولية جميعها حيث a,b,...,c أعداد صحيحة.

بالاعتماد على معلوماتي الرياضية خلال السنوات السابقة فقد أثبتت صحة حالتين خاصتين من هذه المبرهنة بطريقتين جديدتين:

- الحالة الأولى: [23] لا يوجد كثيرة حدود من الدرجة لأولى تعطي الأعداد الأولية جميعها(لا توجد متتالية خطية من الدرجة الأولى أي من الشكل d:y=ax+b تعطي الأعداد الأولية جميعها).

لنعرّف النقطة التي إحداثياتها (x,p) بحيث:

- ✓ P عدد أولي
- ✓ Xترتيبه بين الأعداد الأولية

ولندعوها باسم النقطة الأولية.

نفرض : وجود تابع خطي من الشكل d:y=ax+b يعطي جميع الأعداد الأولية.

بالتالي : يلزم ذلك أن يمرّ المستقيم d:y=ax+b من جميع النقط الأولية.

إذاً: النقطة (1,2) والنقطة (2,3) تنتمي للمستقيم d.

فيكون ميله:

$$m = \frac{y - y'}{x - x'}$$

$$m = \frac{3 - 2}{2 - 1}$$

$$\boxed{m = 1}$$

أيضاً:

النقطتين (4,7) و (5,11) تنتميان للمستقيم d.

---

[21] Nagell 1951 p.65
[22] Hardy and Weight 1979 p.18 and p.22
[23] من إعداد الباحث

فيكون الميل:

$$m = \frac{y - y'}{x - x'}$$

$$m = \frac{11-7}{5-4}$$

$$\boxed{= 4m}$$

وجدنا أنّ:

للمستقيم d ميلين وهذا خلف (تناقض) مع الفرض بأنه يوجد مستقيم يعطي جميع الأعداد الأولية.

بالتالي:

لا يوجد كثيرة حدود من الدرجة لأولى تعطي الأعداد الأولية جميعها(لا توجد متتالية خطية من الدرجة الأولى أي من الشكل d:y=ax+b تعطي الأعداد الأولية جميعها).

❖ تعريف:[24]

- المصفوفة: هي كائن جبري مكوّن من أعمدة وأسطر ويُعبَّر عنها بالرمز M_{mxn} بحيث m تدل على عدد الأسطر و n تدل على عدد الأعمدة ويجب أن تكون عناصرها مأخوذة من R أو C.

مثلاً:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- القطر الرئيس في مصفوفة: خط العناصر التي يتساوى مسقطاها.

مثلا:

في المصفوفة السابقة: العناصر التي تتساوى مساقطها هي:

1(1,1)

5 (2,2)

9 (3,3)

[24] ملخصات شوم- الدكتور فرانك آيرز (أستاذ سابق ورئيس قسم الرياضيات بكلية ديكنسون) – ترجمة نخبة من الأساتذة المختصين- مراجعة الدكتور فاروق البتانوني- قسم الرياضيات في جامعة المنصورة بجمهورية مصر العربية- دار ماكجروهيل للنشر- الدار الدولية للنشر والتوزيع – تشرين الأول 1962م – الفصل الأول والثاني والعاشر.

بالتالي:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

القطر الرئيس

- **المصفوفة المدرّجة:** هي مصفوفة عناصر قطرها الرئيس كلها 1 و ماتحت عناصر قطرها الرئيس أصفار وأحياناً يجوز أن تكون جميع عناصر السطر من الثالث وما فوق جميعها أصفار.

مثلا:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة المكافئة:** تنتج عن المصفوفة الأصلية بتحويلات أولية حتى تصل للشكل المدرّج عن طريق ضرب السطر أو العمود بعدد مغاير للصفر أو تبديل الأسطر R أو تبديل الأعمدة C.

مثلا:اختزل المصفوفة الآتية للشكل المدرّج:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

نضرب السطر الأول بـ 4 ونطرح السطر الثاني من السطر الأول ونضع النتيجة مكان السطر الثاني:

$4R_1 - R_2 \rightarrow R_2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ 1\3 ونضع النتيجة مكان السطر الثاني:

$1/3R_2 \rightarrow R_2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

نضرب السطر الأول بـ 7 ونطرح السطر الثالث من السطر الأول ونضع النتيجة مكان السطر الثالث:

$7R_1 - R_3 \rightarrow R_3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

نضرب السطر الثاني بـ 6- ونجمع السطرين الثاني والثالث ونضع النتيجة مكان السطر الثالث:

$-6R_2 + R_3 \rightarrow R_3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على مصفوفة مدرّجة مكافئة.

- طريقة غاوس لحل جمل المعادلات الخطية:

إذا أردنا حلّ جملة المعادلات الخطية بطريقة غاوس نقوم بالخطوات التالية:

- نكتب المصفوفة الموسّعة Mلجملة المعادلات الخطية.
- نوجد المصفوفة المدرّجة المكافئة لـ M باستخدام تحويلات سطرية.
- نكتب جملة المعادلات الناتجة فنحصل على حل الجملة المفروضة بحلّها بطريقة مناسبة.

- الحالة الثانية[25]: لا يوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية تعطي الأعداد الأولية جميعها(لا توجد متتالية من الدرجة الثانية أي من الشكل $d: y = ax^2 + bx + c$ تعطي الأعداد الأولية جميعها).

[25] من إعداد الباحث

✓ نفرض:وجود متتالية بشكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تعطي الأعداد الأولية جميعها بالتالي: يلزم ذلك أن يمر الخط البياني لـ d من جميع النقاط الأولية

إذاً: النقاط (2،1) و (3،2) و(5،3) تنتمي للمستقيم

إذا كتبنا النقاط الأولية بشكل توابع كما يلي فإنّ:

- 2=a+b+c
- 3= 4a+2b+c
- 5= 9a + 3b+ c

نطبق غاوس:

1) نكتب المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات:

مصفوفة الثوابت

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

مصفوفة المتحولات

الفاصل

2) نوجد المصفوفة المدرّجة المكافئة لـ M باستخدام تحويلات سطرية.

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

نجري عليها التحولات التالية:

- $1/4R_2 \longrightarrow R_2$
- $-R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$
- $-2R_2 \longrightarrow R_2$
- $-9 R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$

- $6R_2+R_3 \longrightarrow R_3$

فنحصل على مصفوفة مدرجة مكافئة من الشكل:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & & -10 \end{pmatrix}$$

3) نكتب جملة المعادلات الخطية الناتجة:

- $a+b+c = 2$
- $b+ 3/2\, c = 1/2$
- $\boxed{C= -10}$

$b+ 3/2\,(-10) = 1/2 \longrightarrow \boxed{b= 15.5}$

$a + 15.5 - 10 = 2 \longrightarrow \boxed{a= -3.5}$

- ✓ نفرض:وجود متتالية بشكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تعطي الأعداد الأولية جميعها
- ✓ بالتالي: يلزم ذلك أن يمر الخط البياني لـ d من جميع النقاط الأولية

إذاً: النقاط (2،1) و (3،2) و(5،3) تنتمي للمستقيم

إذا كتبنا النقاط الأولية بشكل توابع كما يلي فإنّ:

- $2= a+b+c$
- $3= 4a+2b+c$
- $7= 16a+ 4b+ c$

نطبق غاوس:

1) نكتب المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 3 \\ 16 & 4 & 1 & & 7 \end{pmatrix}$$

2) نوجد المصفوفة المدرّجة المكافئة لـ M باستخدام تحويلات سطرية:

نجري على المصفوفة التحويلات السطرية التالية:

- $1/4\ R_2 \longrightarrow R_2$
- $-R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$
- $-2R_2 \longrightarrow R_2$
- $-16R_1+R_3 \longrightarrow R_3$
- $12\ R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$
- $1/3\ R_3 \longrightarrow R_3$

فنحصل على مصفوفة مدرّجة مكافئة من الشكل:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & & -19/3 \end{pmatrix}$$

3) نكتب جملة المعادلات الخطية الناتجة:

- $a+b+c = 2$
- $b + 3/2\ c = 1/2$
- $c = -19/3$

نظراً لاختلاف قيمة c فستختلف كل من قيمتيّ a,b وهذا خلف بالتالي:

لا توجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية من الشكل : $d: Y = ax^n + bx^{n-1} + c$ تعطي الأعداد الأولية جميعها.

الخاتمة والمقترحات

في هذا البحث قد ذكرت إحدى أشهر الحدسيات التي عجز عنها العلماء حتى يومنا هذا وهي:

- حدسية غولدباخ.
- حدسية دورين أندريكا.
- حدسية بروكارد.
- حدسية التوأمين الأوليين.

ولا زال هناك المزيد والعديد من الحدسيات التي لم أتطرق إليها في بحثي مثل حدسية بايتمان، حدسية بانغ، حدسية بيل، حدسية آرتين...

وبعد عدة محاولات فاشلة، نجح العلماء في إثبات بعض الحدسيات فتحولت لنظريات ومبرهنات شهيرة وذكرت منها:

- مبرهنة الأعداد الأولية.
- مبرهنة فيرما.
- لا توجد كثيرة حدود من الشكل ($y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c$) بأمثال صحيحة تعطي الأعداد الأولية جميعها. (مع تقديم إثباتي المتواضع لها في حالة المعادلة الخطية من الدرجة الأولى أو الثانية بطريقة ثانية)

ووضوحاً يكون بالإمكان تجديد براهين العديد من المبرهنات والنظريات بطرق أبسط مع اقتراح اجتماع العلماء المختصين والهاوين لإيجاد براهين الحدسيات التي حيرت البشرية..

المراجع

-المراجع العربية

i. مقالة موسيقا الأعداد الأولية من الموقع:
http://www.faculty.qu.edu.sa/29377/Pages/%D9%85%D9%88%D8%B3%D9%8A%D9%82%D9%89-%D8%A7%D9%84%D8%A3%D8%B9%D8%AF%D8%A7%D8%AF-%D8%A7%D9%84%D8%A3%D9%88%D9%84%D9%8A%D8%A9.aspx

ii. مقدمة في نظرية الأعداد – أ.د.فالح بن عمران بن محمد الدوسري – قسم العلوم الرياضية في كلية العلوم التطبيقية في جامعة أم القرى بمكة المكرمة- الطبعة الأولى للكتاب(1428هـ - 2007 م).

iii. المعجم الوسيط.

iv. ملخصات شوم- الدكتور فرانك آيرز (أستاذ سابق ورئيس قسم الرياضيات بكلية ديكنسون) – ترجمة نخبة من الأساتذة المختصين- مراجعة الدكتور فاروق البتانوني- قسم الرياضيات في جامعة المنصورة بجمهورية مصر العربية- دار ماكجروهيل للنشر- الدار الدولية للنشر والتوزيع – تشرين الأول 1962م – الفصل الأول والثاني والعاشر.

-المراجع الأجنبيّة

i. prime numbers- the most mysterious figures in math- David Wells- John Wiley & sons, Inc.

ii. Nagell 1951 p.65.

iii. Hardy and Weight 1979 p.18 and p.22.

iv. Two approaches to proving Goldbach's Conjecture by :Bernard Farley – advised by: Charles Parry – May 3rd 2005.

v. Twin primers conjecture proof- Shubhankar Paul(Passed BE in Electrical Engineering from Jadavpur University in 2007. Worked at IBM for manual tester with designation Application Consultant. Worked in 3 years and 4 months as IIT Bombay for 3 months as JRF) - International Journal of Engineering and Technical Research (IJETR) - ISSN: 2321-0869, Volume-1, Issue-8, October 2013 – www.erpublication.org

vi. The 1621 edition of Diophantus' Arithmetica, translated into Latin by Claude Gaspard Bachet de Méziriac.

vii. Wolfram demonstration project- 2007- by Hector Zenil.

viii. https://www.quantamagazine.org/20131119-together-and-alone-closing-the-prime-gap /

ix. On Legender's, Brocard's, Andrica's, and Oppermann's Conjectures – German André Paz- Instituto de Educaci´on Superior N.28 Olga Cossettini (2000) Rosario, Santa Fe, Argentina.

المحتويات

المقدّمة 1
الباب الأول: مفهوم الحدسية 3
الفصل الأول: تذكير بمفهوم الأعداد الأولية 3
الفصل الثاني: مفهوم الحدسيّة 4
الباب الثاني: أهم الحدسيّات التي حيّرت البشرية منذ الأزل.. 5
الفصل الأول: حدسيّة غولدباخ القوية (1690 - 1764) عام 1742م - 5
الفصل الثاني: حدسية التوأمين الأوليين - 7
الفصل الثالث: حدسية دورين أندريكا 8
الفصل الرابع. حدسية بروكارد: 9
الباب الثالث: بعد عدة محاولات.. 10
الفصل الأول: مبرهنة فيرما الأخيرة - 10
الفصل الثاني: مبرهنة الأعداد الأولية 14
الفصل الثالث: مبرهنة لجندر - 16
الخاتمة والمقترحات 23
المراجع 24
-المراجع العربية 24
-المراجع الأجنبيّة 25
المحتويات 26