الجمهوريّة العربيّة السّوريّة

هيئة التميّز والإبداع

المركز الوطني للمتميزين

NATIONAL CENTER FOR THE DISTINGUISHED

حلقة بحث بمادة الجبر الخطّي بعنوان:

المصفوفات وتطبيقاتها

The Matrices and its Applications

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

إعداد الطالبة مها حسن كحله

من الصفّ الحادي عشر

إشراف المدرّسة ندى علي

للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧

الفهرس

المقدّمة:

يعود تاريخ المصفوفات إلى الأزمنة القديمة ولكن مصطلح "المصفوفة" لم يستخدم أو يطبّق حتى عام 1850، و Matrix كلمة لاتينية ولها عدة معان بالإنكليزية وتدل على أي مكان لشيء يتشكّل أو يتولّد.

إنّ أصل رياضيات المصفوفات استخدم لدراسة جمل المعادلات الخطية الآنية، حيث يوجد نصّ صينيّ من بين عامي BC 300 و AD 200 من تسعة فصول في فن الرّياضيّات (Chiu Chang Suan Chu) فأعطى أوّل مثال لاستعمال نظام المصفوفات لحلّ المعادلات الآنية، كما ظهر فيها مفهوم المحدّدات لأوّل مرّة.

إنّ مصطلح المصفوفة كتنظيم من الأعداد ظهر عام 1850 من قبل

James Joseph Sylvester

ومنذ ظهور المصفوفات في الصين القديمة فقد بقيت أداة رياضيّة مهمّة تستخدم حتى الآن.

ويرى الكثير من الدارسين أن المصفوفات لا تتعدّى العمليّات الجبرية المعروفة، فهل يقتصر دور المصفوفات في علم الجبر الخطّي؟ وما هو دورها في الحياة العمليّة؟

وللإجابة على هذه الأسئلة سنتعرف على المصفوفات ونستعرض بعض الأفكار المهمّة في البحث التالي.

الفصل الأوّل: التّعريف بالمصفوفات

تعريف: Definition

المصفوفة من رتبة m×n هي ترتيب مستطيل لكمّيات تنتمي إلى حقل ما في m من الصفوف Rows و n من الأعمدة Columns ونكتب A=$[a_{ij}]$ حيث a_{ij} هو عنصر المصفوفة A الواقع في الصفّ i والعمود j و $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$

كما نجد للمصفوفة تعريفاً موافقاً بالاستناد إلى علم الجبر الخطّي فنقول: ليكن K حقلاً تبديلياً وليكن لدينا العددين الطبيعيين $p,n\geq 1$ نسمي مصفوفة الأمثال بأمثال من الحقل K التطبيق $k;(i,j)\longrightarrow a_{ij}$ $A: \mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p\rightarrow$ ونرمز لهذا التطبيق

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث a_{ij} يوجد في نقطة تقاطع السطر رقم i مع العمود رقم j ونرمز لمجموعة المصفوفات فوق الحقل K ب M_{nxp} والتي تمثّل مجموعة المصفوفات ذات nxp عنصراً من K وتقول إن A هي مصفوفة من الدرجة nxp أو نقول أن A هي مصفوفة ب n سطراً و p عموداً من عناصر الحقل K .

من أشكال المصفوفات:

a) إذا كان $n=1$ تصبح المصفوفة من النمط $m\times 1$ وتسمى المصفوفة العمود.

b) إذا كان $m=1$ تصبح المصفوفة من النمط $1\times n$ وتسمى المصفوفة السطر.

c) إذا كان $m=n$ تصبح المصفوفة من النمط $n\times n$ وتسمّى المصفوفة المربّعة من المرتبة n وتسمى جملة العناصر $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ في المصفوفة المربعة القطر الرئيسي للمصفوفة، بينما نسمي جملة العناصر ... $a_{1n},a_{2,n-1}$ القطر الثانوي للمصفوفة.

d) نقول عن المصفوفة أنّها مستطيلة إذا كان عدد أسطرها يختلف عن عدد أعمدتها.

e) مصفوفة الوحدة (الواحدية) هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي 1 وباقي عناصرها أصفاراً.

f) المصفوفة الصفرية وتكون جميع عناصرها أصفاراً.

g) المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة خارج قطرها الرئيسي أصفاراً.

h) المصفوفة السلّميّة هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي متساوية.

i) المصفوفة المرافقة للمصفوفة A نحصل عليها بعد تبديل كل عنصر بمرافقه.

المحدّدات: Determinants

يعرف محدد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ من المرتبة 2×2 على أنّه الكمية المقياسية $D = ad - bc$ أي جداء العنصرين الموجودين على القطر الرئيسي مطروحاً منه جداء العنصرين الموجودين على القطر الثانوي.

ولكن في حال كانت المصفوفة من مرتبة n=3 فيوجد عدة طرق لحساب المحدّد منها طريقة ساروس والطريقة المباشرة وغيرها وتتلخّص هذه الطرائق أنّه من أجل المصفوفة

$$A = \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

فإن المحدد لها يكون كما يلي:

$$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

أمّا من أجل المصفوفة المربعة من المرتبة $n \times n$ حيث $n \geq 2$ فإنّه يكون لها n^2 من المصغرات ذات الرتبة $(n-1) \times (n-1)$ وتنشأ هذه المصغّرات من حذف الصف i والعمود j اللذين يحويان العنصر a_{ij} من المصفوفة A ويرمز له بالرمز M_{ij} ، حيث نعرف عامل العنصر a_{ij} أو المتمّم الجبري له كما يلي :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

ويكون محدّد المصفوفة المربّعة $A = [a_{ij}]$ يساوي مجموع جداءات عناصر أحد أسطره أو أحد أعمدته بعواملها ، أي

بالنسبة للسطر i يكون

$$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

أما بالنسبة للعمود j يكون

$$D = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

أي $$\mathrm{D} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, . C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . (-1)^{i+j} \, . M_{ij}$$

ولكن إذا كانت n كبيرة فنستخدم خواص المحدّدات:

- لا تتغير قيمة المحدّد إذا جعلنا أسطر المصفوفة أعمدة وأعمدتها أسطر على الترتيب.
- تنعكس إشارة المحدد إذا بادلنا بين سطرين من أسطر المصفوفة أو بين عمودين من أعمدتها.
- تنعدم قيمة المحدد إذا تطابق في المصفوفة سطران ما أو عمودان.
- إذا ضربنا أو قسمنا جميع عناصر سطر ما أو عمود ما بعدد $k \neq 0$ فإن قيمة المحدد تضرب أو تقسم بهذا العدد.
- تنعدم قيمة المحدد إذا كانت عناصر أحد أسطره أو أحد أعمدته أصفاراً.
- إذا تناسبت عناصر سطرين أو عمودين في مصفوفة ما فإنّ قيمة المحدّد تصبح صفراً.
- إذا أضفنا أو طرحنا من عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة في مصفوفة ما عناصر سطر آخر أو عمود آخر مضروبة بعدد ثابت k فإن قيمة المعين لا تتغيّر.

الفصل الثاني: العمليّات على المصفوفات

جمع المصفوفات: Addition of Matrices

لتكن لدينا المصفوفتان A و B من النمط $m \times n$ بحيث $A = (a_{ij})$ و

$B = (b_{ij})$: $i = 1,2,3, \dots\dots, m$ و $j = 1,2,3, \dots\dots n$

نقول عن المصفوفة $C = (c_{ij})$ أنها مجموع المصفوفتين A و B ونكتب

$C = A + B$ إذا كان $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ وذلك مهما يكن

$i = 1,2,3, \dots\dots, m$ و $j = 1,2,3, \dots\dots n$

خواص جمع المصفوفات

لتكن لدينا المصفوفات A, B, C من النمط نفسه فإن جمع المصفوفات:

- تبديلي $A + B = B + A$
- تجميعي $(A + B) + C = A + (B + C)$
- له عنصر حيادي وهو المصفوفة الصفرية التي تكون من نفس النمط وجميع عناصرها أصفاراً $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$
- لكل مصفوفة A نظير نرمز له $-A$ حيث $A + (-A) = 0_{m,n}$

طرح المصفوفات Subtraction of Matrices

بفرض A و B مصفوفتان من النمط نفسه، فإن $A + (-B)$ هي نفسها $A - B$

ويسمّى الفرق بين A و B أي طرح المصفوفتين.

جداء المصفوفات: Matrix Multiplication

لتكن لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ حيث $j = 1,2, \dots \dots n$ و $i = 1,2, \dots \dots m$ أي من النمط $m \times n$ والمصفوفة $B = (b_{jk})$ حيث $j = 1,2, \dots \dots n$ و $k = 1,2, \dots \dots p$ من النمط $n \times p$ ، فتكون المصفوفة $C = (c_{ik})$ حيث $k = 1,2, \dots \dots p$ و $i = 1,2, \dots \dots m$ من النمط $m \times p$ جداء المصفوفتين B وA إذا كان $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ ونكتب $C = A.B$ ويكون للضرب معنى أو أن المصفوفة B قابلة للضرب بالمصفوفة A إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B ، أي يتغير ناتج الضرب تبعاً لاتجاه الضرب.

خواص جداء المصفوفات:

- جداء المصفوفات تجميعي $(A.B).C = A.(B.C)$
- جداء المصفوفات توزيعي بالنسبة إلى الجمع $A.(B + C) = A.B + A.C$
- وكذلك $(A + B).C = A.C + B.C$
- يوجد عنصر حيادي في حال كانت المصفوفة مربعة من المرتبة n وهو المصفوفة الواحدية I_n ويكون $A.I_n = I_n.A = A$
- ضرب المصفوفة بعدد k هو المصفوفة $k.A = A.k$ الناتجة من ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالعدد k .

منقول (مدوّر) مصفوفة: Matrix Transpose

لتكن لدينا المصفوفة A من النمط $m \times n$ فإن منقولها هو مصفوفة من النمط $n \times m$ يرمز لها A^T التي نحصل عليها من A بقلب أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطر على الترتيب.

خواص منقول مصفوفة:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A.B)^T = A^T.B^T$

- $(r.A)^T = rA^T \quad \forall\, a \in C$
- $(A^T)^T = A$

مقلوب مصفوفة: Inverse Matrix

نقول أن للمصفوفة المربّعة A من المرتبة n مقلوب إذا وجدت مصفوفة B تحقق $A.B = B.A = I_n$ فتكون المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A وبالعكس ونرمز لمقلوب المصفوفة A بالرمز A^{-1} .

- إذا وجد مقلوب لمصفوفة مربّعة فإن هذا المقلوب وحيد.
- يكون للمصفوفة المربعة A مقلوب إذا كان$|A| \neq 0$ (أي محددها غير معدوم)
- لإيجاد المقلوب للمصفوفة A نأخذ مصفوفة المتممات الجبرية لها ونرمزها بA^* ثمّ نحسب منقولها فيكون A^{*T} بالتالي $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.A^{*T}$

قسمة المصفوفات: Division of Matrices

عموماً فإنّه لا وجود لعملية قسمة مصفوفة على مصفوفة أي العملية $A/_B$ غير موجودة ولكن إذا ما كانت B^{-1} موجودة فإن العملية $A.B^{-1}$ أو $B^{-1}.A$ هي المعرفة في المصفوفات.

أثر مصفوفة: Trace of a Matrix

لتكن المصفوفة المربعة A من المرتبة n فإن أثر المصفوفة A هو مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة ونرمز له ب $tr\ A$ أي $tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

خواصّ أثر مصفوفة:

- $tr\ (A.B) = tr\ (B.A)$
- $tr\ (k.A) = k.tr\ A$
- $tr\ (A^T) = tr\ A$
- $tr\ (A + B) = tr\ A + tr\ B$

قوّة مصفوفة : Power of a Matrix

كما رأينا أنّه من خواصّ جداء المصفوفات $(A.B).C = A.(B.C)$ ولكن عندما تكون $A = B = C$ تصبح العلاقة السابقة $A^3 = A.A^2 = A^2.A$

وبشكل عام فإن قوّة المصفوفة A تكون $A^m = \underbrace{A.A.\dots.A}_{m \text{ مرة}}$

خواص قوّة مصفوفة:

- $(A^r)^s = A^{rs}$ و $A^r.A^s = A^{r+s}$
- $A^1 = A$ و $A^0 = I_n$

التحويلات الأوّليّة لمصفوفة: Elementary Transformations

$a)$ التبديل بين سطرين (أو عمودين).

$b)$ ضرب عمود (أو سطر) بعدد لا يساوي الصفر.

$c)$ جمع عناصر أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) مضروبة بعدد لا يساوي الصفر إلى عناصر سطر آخر (أو عمود آخر).

يمكننا الحصول على مصفوفة مكافئة B لمصفوفة A بتطبيق عدد منته من التحويلات الأوّليّة على المصفوفة A، ونرمز لذلك بالرمز $A \sim B$ ، والعلامة $(\sim)$ علامة التكافؤ وليس المساواة أي $A \neq B$ ، وللتحويلات الأوليّة أهمّيّة في حل المعادلات الخطّيّة وبعض التطبيقات الأخرى.

رتبة مصفوفة: Rank of a Matrix

رتبة مصفوفة هي رتبة أكبر صغير لمحدد المصفوفة غير معدوم فيها فيكون $0 \le r(A) \le K = \min(n,m)$.

- $r(A) = r(A^T)$
- التحويلات الأولية لا تؤثر على رتبة المصفوفة.

كثير حدود مصفوفة:

لتكن لدينا المصفوفة المربعة A من المرتبة n فإننا نسمي العبارة :

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

كثير حدود المصفوفة A والذي هو مصفوفة من المرتبة n حيث أنّ a_i هي أمثال كثير الحدود و $i = 1,2,3, \dots, m$.

التوابع العددية لمصفوفة:

ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث أنّ كلاًّ من $f(x)$ و $h(x)$ و $g(x)$ كثير حدود، عندئذ نقول عن المصفوفة :

$$f(A) = \frac{g(A)}{h(A)} = g(A).h^{-1}(A) = h^{-1}(A).g(A)$$

أنّها تابع عددي للمصفوفة A بفرض وجود $h^{-1}(A)$.

معادلات المصفوفات:

إذا كان لدينا جملة معادلات خطية حيث عدد المعادلات = عدد المجاهيل ومصفوفة الأمثال للجملة هي A ومعينها غير معدوم، نفرض B مصفوفة الحدود الثابتة للجملة و X مصفوفة المجاهيل، أي

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ونكتب جملة المعادلات بالشكل $A.X = B$ وهي الشكل المصفوفي للجملة، ولحلّها نضرب طرفي المعادلة بـ A^{-1} ، فنجد $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$ أي

$I_n.X = A^{-1}.B$ ومنه الحلّ هو المصفوفة $X = A^{-1}.B$.

الفصل الثالث: حلّ جملة المعادلات الخطيّة

حلّ المعادلات الخطية Solving a System of Linear Equations

لتكن لدينا جملة مؤلّفة من m معادلة خطّيّة ذات n مجهول

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

يمكن ألّا تكون $m = n$ ولكن سنتطرق إلى هذه الحالة فقط، إن مجاهيل الجملة هي $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ هي الحدود الثابتة للجملة ، نقول عن الجملة أنّها قابلة للحل (آنية) إذا وجدت القيم $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots., x_n = k_n$ حيث إذا عوضناها في الجملة تحققها، أي تكون الأعداد $k_1\ k_2 \dots k_n$ هي حل الجملة السابقة، وإذا لم توجد لها حلول نقول أن الجملة مستحيلة الحلّ (غير آنيّة).

لدينا
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots\ b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots\ b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots\ b_n \end{pmatrix}$$

إن A هي مصفوفة الأمثال للجملة و $\tilde{A}$ هي المصفوفة الموسعة للجملة الناتجة عن إضافة عمود الحدود الثابتة إلى المصفوفة A وبفرض $r(A) = r$ و $r(\tilde{A}) = \bar{r}$ فإنّه حسب نظرية كرونكر – كابيلي فالشرط اللازم والكافي كي تكون الجملة السابقة قابلة للحل هو أن تكون رتبة مصفوفتها A يساوي رتبة المصفوفة الموسعة $\tilde{A}$ أي $\bar{r} = r$.

طريقة كرامر: Cramer's Method

لندرس حالة كون محدد الأمثال لمصفوفة الجملة غير معدوم، وفي حالة جملة مؤلفة من ثلاث معادلات خطيّة ذات ثلاثة مجاهيل:

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$$
$$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$$
$$a_3X + b_3Y + c_3Z = d_3$$

إن محدد الأمثال للجملة هو

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ في حالة $D \neq 0$ يكون حل الجملة كالتالي:

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$ و $$Y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$ و

$$Z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

بحيث نحصل على D_x من محدد الأمثال D بعد إبدال العمود الأوّل فيه الذي يحوي أمثال X بالحدود الثابتة $d_1\ d_2\ d_3$ ، وكذلك في D_y و D_z .

طريقة غاوس: Gauss's Method

تعتمد طريقة غاوس في حل جملة معادلات خطّيّة على تحويل هذه الجملة إلى جملة مكافئة يكون حلّها أسهل، حيث:

نأخذ المصفوفة الموسعة للجملة المطلوب حلّها ونجري عليها تحويلات أوليّة على الأسطر فقط، فتتحوّل إلى مصفوفة متدرّجة والتي تكافئ جملة معادلات خطّيّة متدرّجة، عندئذ لدينا حالتين:

a) إذا كانت المصفوفة الموسعة المتدرجة فيها سطراً بالشكل (0a ...0 0 0 0) حيث a≠ 0 ، فإن الجملة مستحيلة الحلّ، لأنه غير ممكن أن يكون لدينا

$$0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_n = a$$

b) إذا لم تكن المصفوفة كما في الحالة الأولى فإن لها حل:

- إذا كان عدد الأسطر في المصفوفة الموسّعة للجملة المتدرّجة = عدد المجاهيل تكون جملة المعادلات بالشكل المثلثي:

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1$$

$$c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2$$

$$c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = d_3$$

....

$$c_{nn}x_n = d_n$$

حيث $c_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,3, \dots, n)$ ومن المعادلة الأخيرة نحسب x_n ونعوض بالتي تسبقها وهكذا ، والجملة في هذه الحالة تملك حلاً وحيداً.

- إذا كان عدد الأسطر في المصفوفة الموسّعة للجملة المتدرّجة أقلّ تماماً من عدد المجاهيل عندئذ تأخذ جملة المعادلات الخطّيّة شكل شبه منحرف نأخذ قسماً من المجاهيل ونعتبرها مجاهيل رئيسية وننقل باقي المجاهيل إلى الطرف الأيمن ونحلّ الجملة بدلالة المجاهيل الثانوية.

طريقة غاوس-جوردان: Gauss-Jordan Method

في هذه الطريقة نضيف على خطوات طريقة غاوس بأن نجعل العناصر فوق عنصر الارتكاز (كما في أسفله) أصفاراً، وبذلك نحصل على المصفوفة المكافئة التي تكون قطريّة، ثمّ نحصل على الحلّ بسهولة.

وسنأخذ تطبيقاً على حلّ جملة معادلات خطّيّة:

لتكن لدينا الجملة

$$2x + 5y + 10z = 0$$

$$7x - 4y - 51z = 0$$

$$-3x + 11y + 59z = 0$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسّعة للجملة ونجري التحويلات الأوّلية على أسطرها فقط:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&5&10&\vdots\,0\\7&-4&-51&\vdots\,0\\-3&11&59&\vdots\,0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+\mathrm{r}_3}$$

$$\begin{pmatrix}2&5&10&\vdots\,0\\4&7&8&\vdots\,0\\-3&11&59&\vdots\,0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\xrightarrow{r_3+2r_1}$$

$$\begin{pmatrix}2&5&10&\vdots\,0\\0&-3&-12&\vdots\,0\\1&21&79&\vdots\,0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\xrightarrow{r_3+7r_2}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&-2&\vdots\,0\\0&-3&-12&\vdots\,0\\1&0&-5&\vdots\,0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots\,0\\0&1&4&\vdots\,0\\1&0&-5&\vdots\,0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-5&\vdots\,0\\0&1&4&\vdots\,0\\1&0&-5&\vdots\,0\end{pmatrix}$$

ومن ثمّ نستطيع حذف السطر الأخير لأنه يساوي السطر الأوّل، ونفرض $z=\lambda\in R$ فينتج $x-5z=0$ و $y+4z=0$ ويعطى حلّ الجملة كالتالي:

$$x=5\lambda \text{ و } y=-4\lambda\,,z=\lambda\,,\lambda\in R$$

أي حصلنا على الحلّ بدلالة λ التي تكون اختيارية من R .

الفصل الرابع: تطبيقات المصفوفات

التطبيقات في الاقتصاد: Applications in Economy

إن استخدام المصفوفات في الاقتصاد يعدّ من أهم التطبيقات لكثرة استخدامه، فمثلاً بفرض أن اقتصاد منطقة ما يقسّم إلى عدة قطاعات متنوعة كالصّناعة والتجارة والمواصلات والترفيه، وبفرض أننا نعلم النتاج الكليّ لسنة واحدة ونعلم تماماً كيفية تبادل كل قطاع بالنسبة للقطاعات الأخرى، وندعو قيمة نتاج القطاع بـ السعر ومن أجل هذا أثبت لدينا النتيجة التالية: "يوجد معادلة أسعار متخصصة بالنتاج الكلي للقطاعات المتنوعة في كل منها طريقة ليتناسب الدخل مع التكاليف"

كما في المثال التالي:

بفرض أن الاقتصاد يتألف من ثلاث قطاعات رئيسية هي الفحم الحجري والطاقة الكهربائية والفولاذ ونتاج كل منها يوزع بين القطاعات المتنوعة كما هو مبين في الجدول حيث العناصر الموجودة في الأعمدة تمثل بالأجزاء الكسرية النتاج الكلي للقطاع، فمثلاً العمود الثاني من الجدول يمثل نتاج الكهرباء موزعة كالتالي: 40% للفحم و 50% للفولاذ و الباقي 10% للكهرباء (أي للقطاع الكهربائي 10% كتكلفة حيث تستخدمها لتدير عملها)، وإن مجموع الأجزاء العشرية في كل عمود يجب أن يساوي الواحد 1.

Distribution of Output from:			
Coal	**Electric**	**Steel**	**Purchased by:**
.0	.4	.6	Coal
.6	.1	.2	Electric
.4	.5	.2	Steel

جدول ١

نرمز للقيم الموافقة للنتاج السنوي لكل من الفحم، الكهرباء، الفولاذ بالرموز p_S, p_E, p_C بالترتيب، والمطلوب إيجاد معادلة الأسعار التي تجعل دخل كل قطاع تتناسب مع تكاليفه.

الحلّ:

القيم الموجودة بالأعمدة تمثل استهلاك النتاج من قبل القطاعات الأخرى وبالمقابل في الأسطر تمثل حاجة القطاع، فمثلاً السطر الأول من الجدول يبين أن قطاع الفحم يتلقى 40% من نتاج الكهرباء و 60% من نتاج الفولاذ ، فتكون تكلفة القطاع الفحم هي $0.4p_E + 0.6p_S$ ولكي يكون الدخل مساوياً التكلفة نكتب

$$p_C = 0.4p_E + 0.6p_S$$

وبنفس الطريقة من السطر الثاني لدينا قطاع الكهرباء يحتاج إلى 60% من إنتاج الفحم و 10% من الكهرباء و 20% من الفولاذ بالتالي فإن حاجة هذا القطاع

$$p_E = 0.6p_C + 0.1p_E + 0.2p_S$$

وكذلك السطر الثالث

$$p_S = 0.4p_C + 0.5p_E + 0.2p_S$$

ولحل جملة المعادلات الخطية ننقل جميع المجاهيل إلى طرف في كل معادلة ونجمع الحدود المتشابهة:

$$p_C - 0.4p_E - 0.6p_S = 0$$
$$-0.6p_C + 0.9p_E - 0.2p_S = 0$$
$$-0.4p_C - 0.5p_E + 0.8p_S = 0$$

ثم نقوم بالتحويلات الأولية، وللتبسيط فإننا نوزع الحدود العشرية على مكانين

$$\begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ -.6 & .9 & -.2 & 0 \\ -.4 & -.5 & .8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ 0 & .66 & -.56 & 0 \\ 0 & -.66 & .56 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ 0 & .66 & -.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ 0 & 1 & -.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -.94 & 0 \\ 0 & 1 & -.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحلّ العام للجملة يصبح $p_C = 0.94p_S,\ p_E = 0.85p_S,$ و p_S اختياري ومتجه المعادلة يكون

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_C \\ p_E \\ p_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .94p_S \\ .85p_S \\ p_S \end{bmatrix} = p_S \begin{bmatrix} .94 \\ .85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

موازنة المعادلات الكيميائية: Balancing Chemical Equations

إنَّ المعادلات الكيميائية تصف كمّيّات المواد المتفاعلة والمواد الناتجة بالتفاعل الكيميائيّ ، وسنأخذ المثال التالي: وهو احتراق غاز البروبان أي عند تفاعل البروبان C_3H_8 مع الأكسجين O_2 ليشكل ثنائي أكسيد الكربون CO_2 وبخار الماء H_2O

كما في المعادلة $(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$

ولموازنة المعادلة يجب إيجاد جميع الأعداد x_1, x_2, x_3, x_4 بحيث يكون عدد ذرات كل من الكربون(C) و الهيدروجين(H) والأوكسجين (O) في الطرف الأيسر مطابقاً لها في الطرف الأيمن (لأنّ الذرّات لا تفنى ولا تستحدث ذرات جديدة خلال التفاعل)

وباستخدام المصفوفات والجبر الخطي نكتب المصفوفات التي تحوي عدد ذرات كل مركب في التفاعل، وفي التفاعل السابق لدينا ثلاثة أنواع من الذرات (carbon, hydrogen, oxygen) فننشئ لكل المركبات كما يلي:

$$C_3H_8: \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix},\ O_2: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ CO_2: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ H_2O: \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Carbon} \\ \leftarrow \text{Hydrogen} \\ \leftarrow \text{Oxygen} \end{array}$$

لموازنة المعادلة فإنّ المعاملات x_1, x_2, x_3, x_4 يجب أن تحقق

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ننقل جميع الحدود إلى طرف مع تغيير إشاراتها:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الحلّ العام بعد القيام بحل جملة المعادلات الخطيّة واستخدام التحويلات الأوليّة:

$x_1 = \frac{1}{4}x_4$ ، $x_2 = \frac{5}{4}x_4$ ، $x_3 = \frac{3}{4}x_4$، حيث x_4 اختيارية

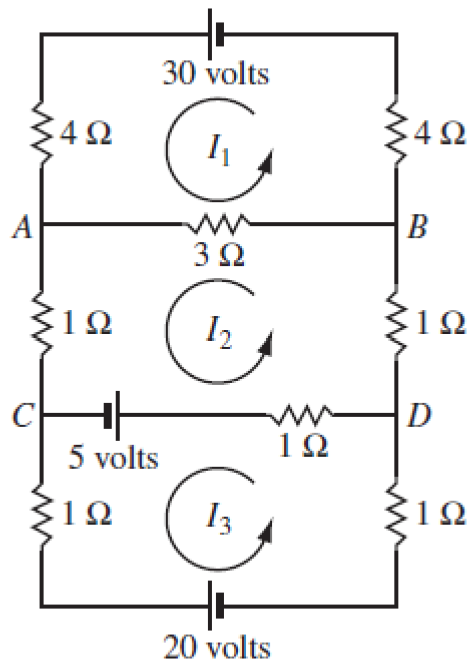
ولكن المعاملات في المعادلة الكيميائية يجب أن تكون أعداد صحيحة فنأخذ $x_4 = 4$

بالتالي $x_1 = 1 , x_2 = 5 , x_3 = 3$ والمعاملات بأصغر ما يمكن فتصبح المعادلة

الموزونة بالشكل $C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$

في الدارات الكهربائيّة In Electrical Networks

نستطيع استخدام المصفوفات في الشبكات الكهربائية والإلكترونية بشكل واسع، ولدراسة هذا التطبيق بشكل مبسّط نأخذ المثال التالي، حيث لدينا في الشكل أدناه شبكة من ثلاث حلقات، والمطلوب تحديد التيّارات المارّة خلالها.



رسم توضيحي 1

الحل:

بالنسبة للحلقة 1 التيار I_1 يمرّ خلال ثلاث مقاومات ومجموع فروق الجهد RI يكون

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = 11I_1$$

التيّار في الحلقة 2 يمر في جزء من الحلقة 1 خلال الفرع القصير بين A و B وفرق الجهد على الفرع المشترك هو $3I_2$ فولط .

على أيّة حال فإنّ اتّجاه التيار بالفرع AB في الحلقة 1 عكس ما هو في الحلقة 2 فالمجموع الجبري لفروق الجهد في الحلقة 1 هو $11I_1 - 3I_2$ وجهد الحلقة 1 هو $+30$ فولط وحسب قانون كيرشوف لفروقات الجهد ينتج $11I_1 - 3I_2 = 30$

ومعادلة الحلقة 2 هي $-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$

بحيث $-3I_1$ ناتجة عن مرور التيار في الحلقة 1 عبر الفرع AB (فرق الجهد سالب لأنّ التيّار يمر باتجاه معاكس عن جهته في الحلقة 2) و $6I_2$ هي مجموع المقاومات في الحلقة 2 مضروبة بتيار الحلقة ، أمّا $-I_3$ ناتجة من تيار الحلقة 3 خلال المقاومة $1\ ohm$ في الفرع CD عكس اتجاهه في الحلقة 2 .

ومعادلة الحلقة 3 هي $-I_2 + 3I_3 = -25$

في الحلقة 3 لدينا منبعي جهد فمجموعهما -25 فولط حيث الجهد سالب لأن اتجاه التيار في CD أيضاً معاكس.

ولحساب تيارات الحلقة نحلّ جملة المعادلات

$$\begin{aligned} 11I_1 - 3I_2 \qquad &= 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 &= 5 \\ -I_2 + 3I_3 &= -25 \end{aligned}$$

ثم نقوم بالتحويلات الأولية على الأسطر للمصفوفة الموسّعة التي تقودنا إلى الحل $I_1 = 3$ أمبير $I_2 = 1$ أمبير ،$I_3 = -8$ أمبير ، ولكن القيمة السالبة ل I_3 تدل على الجهة فقط.

❋ ❋

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

الخاتمة والنّتائج

ومما سبق عرضه، إنّ المصفوفات اليوم لا تستخدم لحلّ المعادلات الخطّيّة فقط بل وإنّ لها دور كبير في الحياة إذ أنّها تستخدم في كثير من المجالات التطبيقية، كتحليل العلاقات وتنظيم البيانات في النواحي الاقتصاديّة والاجتماعيّة لتتسع إلى علوم الهندسة المتقدّمة والكيمياء والمجالات الأخرى، حيث أن المصفوفات انتشر استخدامها في العلوم التطبيقية كوسيلة فعّالة بغرض تسهيل العمليات الرياضية الطويلة والمعقّدة بالإضافة إلى اختصارها للوقت وإعطاء النتائج الصحيحة.

ولذلك أقترح التوسع في دراسة علم المصفوفات والاستفادة منه لما له من تطبيقات واسعة كالتي ورد ذكرها في حلقة البحث وغيرها الكثير من التطبيقات التي لم تذكر كاستخدام المصفوفات في الهندسة الفراغية وتصميم الصور ثلاثية الأبعاد على الحاسوب وحلّ الكثير من المعادلات المعقّدة، وعلينا بتوظيف المعارف في تطبيقاتها لمزيد من التقدم والتطوّر.

* *

المصادر والمراجع:

- Hefferon Jim , Linear Algebra , Saint Michael's College , 2014
- Lay David , Linear Algebra and its application , University of Maryland-College Park , 2012
- ***أ.د.هيفا-غازي ، الرياضيات (١) ، جامعة تشرين-كلية الهندسة المدنيّة، ٢٠٠٦***
- ***أ.د.الطويل-مجدي ، المصفوفات النظريّة والتطبيق ، جامعة القاهرة-كلية الهندسة ، ١٩٩٦***

****