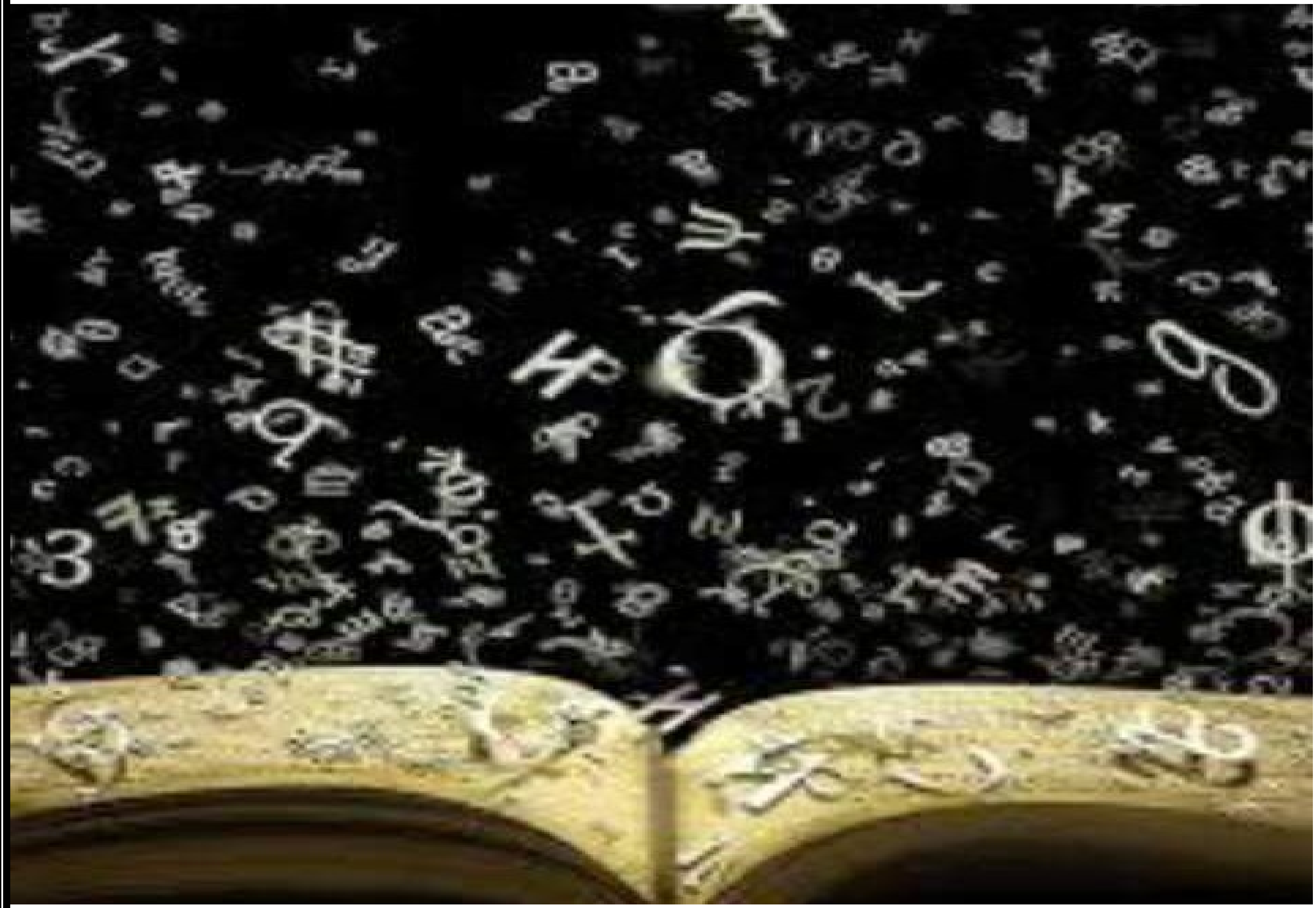
المركز الوطني للمتميزين
The National Centre For Distinguished

دوال و أعداد

خاصة



إعداد الطالب : سليم جلّيط
إشراف المدرسة : كلوديا جندي

الفهرس

المقدمة :

إن الرياضيات هي أم العلوم والعدد هو لغة العلم ومنذ بداية تعرفنا على الرياضيات تعاملنا مع الأعداد كمفهوم مجرد ولم ندرك أهميته وفيما بعد تعرفنا على العمليات الحسابية على تلك الأعداد (الجمع والضرب و....) ومن ثمّ توسع مفهومنا أكثر فأكثر حيث أصبحنا أمام مفهوم مجموعة الأعداد (كالأعداد الطبيعية والصحيحة و......)

وخلال دراستنا تعرفنا على مجموعات جزئية ضمن مجموعات الأعداد حيث تضم تلك المجموعات الجزئية أعداداً تحقق جميعها شرطاً معيناً (خاصّاً) أو ترتبط كلها بقاعدة محددة فمثلاً مجموعة الأعداد الزوجية هي مجموعة تعرّف بالقاعدة التالية

يقال عن عدد $n \in Z$ أنه عدد زوجي إذا كان $n = 2m$ بحيث $m \in Z$

كما تعرف مجموعة الأعداد الأولية بأنها جميع الأعداد التي لها قاسمان فقط (العدد ذاته والعدد واحد) وهذه الأعداد تدعى ب الأعداد الخاصة بالإضافة إلى تعرفنا على بعض التوابع (الدوال) الشهيرة كدالة $sin(x)$ و الدالة التربيعية.

ولكن ألا يوجد أنواع أخرى عديدة من الدوال و الأعداد الخاصة؟

إذاً ماهي تلك الدوال العددية وما القواعد التي تربط بين منطلقها ومستقرها وماهي خواص تلك الدوال ؟

وما الأنواع الأخرى للأعداد الخاصة وما الصفات التي تميزها عن غيرها من الأعداد وما استخداماتها ؟

الفصل الأول : الدوال العددية

تعريف:

- يقال عن دالة $f\ :\ Z^+ \to B$ أنها دالة عدديّة إذا كانت $B\ \leq C$ حيث C مجموعة الأعداد المركبة

1-1 الدالة الضربيّة

تعاريف:

- يقال عن دالة عددية أنها دالة ضربية، لكل $a, b \in Z^+$ و $(a, b) = 1$ إذا كان $f(ab) = f(a).f(b)$
- يقال عن دالة عددية أنها دالة ضربية كليا إذا كان $f(ab) = f(a).f(b)$ لكل $a, b \in Z^+$

مثال(1):

(أ) $f\ :\ Z^+ \to Z^+$ حيث $f(a) = a^n$ لكل $a \in Z^+$ دالة ضربية كلياً ، لآن $f(ab) = (ab)^n = a^n.b^n = f(a).f(b)$، لكل $a, b \in Z^+$

(ب) $f\ :\ Z^+ \to R$ حيث $f(a) = \log(a)$ دالة عددية ليست ضربية ، لآن

$$f(ab) = \log(ab) \neq \log(a).\log(b) = f(a).f(b)$$

والآن لدراسة بعض خواص الدالة الضربية

مبرهنة(1):

إذا كانت f دالة ضربية ، فإن $f(1) = 1$

البرهان:

بما أن f دالة ضربية بالفرض إذاً يوجد $a \in Z^+$ بحيث أن $f(a) \neq 0$ وعليه فإن $f(a) = f(a.1) = f(a).f(1)$ ومنها نجد أن $f(1) = 1$

مبرهنة(2):

إذا كانت f دالة ضربية فإن $g(a)=\sum_{d\backslash a} f(d)$ دالة ضربية

البرهان:

نفرض أن $a,b\in Z^{+}$ و $(a,b)=1$ إذاً $f(d)$ $g(ab)=\sum_{d\backslash ab}$ وبما أن

$(a,b)=1$ ، $d\backslash ab$ إذاً يوجد عددان موجبان وحيدان c,e بحيث أن $c\backslash a$ و

$e\backslash b$ ، $d=ce$ ، $(c,e)=1$ عليه فإن $g(ab)=\sum_{\substack{c\backslash a\\ e\backslash b}} f(ce)$

وبما أن f دالة ضربية فإن $g(ab)=\sum_{\substack{c\backslash a\\ e\backslash b}} f(c)f(e)$ ولكن

$$\sum_{\substack{c\backslash a\\ e\backslash b}} f(c)f(e)=\sum_{c\backslash a} f(c).\sum_{e\backslash b} f(e)$$ ومنه

$$=g(ab)=\sum_{c\backslash a} f(c).\sum_{e\backslash b} f(e)=g(a).g(b)$$

وبالتالي فإن g دالة ضربية .

2-1 الدالتان مجموع وعدد قواسم عدد طبيعي

تعريف:

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً ، فيرمز لعدد قواسم n بالرمز $\tau(n)$ ولمجموع قواسم عدد بالرمز $\sigma(n)$.

إذاً

$$\sigma(n) = \sum_{d \backslash n} d \, , \tau(n) = \sum_{d \backslash n} 1$$

مثال:

أ) $\sigma(3) = 1 + 3 = 4$ ، $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ ، $\sigma(1) = 1$

ب) $\tau(3) = 2$ ، $\tau(6) = 4$ ، $\tau(1) = 1$.

ملاحظة:

(1) $\sigma(n) = n + 1 \Leftrightarrow n$ عدد أولي

(2) $\tau(n) = 2 \Leftrightarrow n$ عدد أولي

والآن لدراسة بعض خواص الدالتان τ و σ

مبرهنة(3):

إذا كان $n = p^r$ ، حيث p عدداً أولياً فإن :

أ) $\tau(n) = r + 1$ ، ب) $\sigma(n) = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$.

البرهان:

بما أن p عدد أولي إذاً قواسم n هي $1, p, p^2, \dots \dots \dots \dots p^r$ وعليه فإن

$$\tau(n) = r + 1 \text{ و } \sigma(n) = 1 + p + p^2 + \cdots \dots \dots \dots p^r = \frac{p^{r+1} - 1}{p - 1}$$

نتيجة(1):

$n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{e_i}$ ، فإن

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{{p_i}^{e_i+1} - 1}{p_i \quad - 1} \qquad\qquad \tau(n) = \prod_{i=1}^{r} (e_i + 1)$$

3-1 دالة أويلر

تعريف:

نعرف دالة أويلر كالآتي:

$\phi(n) = |\{a \in Z^{+}, 1 \leq a \leq n, (a,n) = 1|$ أي أن

$$\phi(n) = \sum_{\substack{(a,n)=1 \\ 1 \leq a \leq n}} 1$$

مبرهنة(4):

إذا كان $n > 1$ فإن $\phi(n) = n - 1$ إذا وفقط إذا كان n عدداً أولياً

البرهان:

بفرض n عدد أولي إذاً $1,2, \dots \dots, n-1$ أعداد أولية نسبياً n وعليه فإن $\phi(n) = |\{1,2, \dots \dots, n-1\}| = n - 1$.

ولإثبات العكس نفرض أن $\phi(n) = n - 1$ إذا كان n عدد مؤلف إذاً يوجد على الأقل عددين a, b بحيث $1 < a \leq b < n$ و $n = ab$ وعليه فإن $(n, a) \neq 1$ $(n, b) \neq 1$. إذاً يوجد على الأقل عددين من بين الأعداد $1, \dots, n-1$ ليسا أوليان نسبياً مع n وعيه فإن $\phi(n) \leq n - 2$ وهذا يناقض الفرض، إذاً n عدد أولي.

خواص دالة أويلر:

- إذا كان p عدداً أولياً فإن $\phi(p^{m}) = p^{m} - p^{m-1}$
- ϕ دالة ضربية لكن ليست كلياً $\phi(12) = 4 \neq 2 = \phi(6).\phi(2)$
- إذا كان $n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{e_i}$ فإن $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$
- إذا كان $n > 2$ فإن $\phi(n)$ عدد زوجي

4-1 دالة موبيص

تعريف:

نعرف دالة موبيص $\mu(n)$ كالآتي إذا كان $n \in Z^+$

$$\mu(n)\begin{cases} 1 & \text{إذا كان } n = 1 \\ 0 & n = p^m \text{ عدد أولي } p \text{ حيث}, m \geq 2 \\ (-1)^r & \text{إذا كان } p_i \prod_{i=1}^{r} = n \text{ و } p_i \text{ أعداد أولية مختلفة} \end{cases}$$

مثال:

(أ) $\mu(1) = 1$ ، $\mu(2) = -1$ ، $\mu(10) = (-1)^2 = 1$ ، $\mu(16) = 0$

مبرهنة(5):

μ دالة ضربية .

البرهان:

نفرض أن $a, b \in Z^+$ و $(a, b) = 1$ إذاً :

(أ) إذا كان $a = 1$ أو $b = 1$ ، يمكننا أن نفرض أن $b = 1$ فنجد أن

$$\mu(ab) = \mu(a) = \mu(a).1 = \mu(a).\mu(b)$$

(ب) إذا كان p عدداً أولياً و $p^2 \backslash a$ أو $p^2 \backslash b$ فإن $p^2 \backslash ab$ كما أن $\mu(a) = 0$

أو $\mu(b) = 0$ وعليه فإن $\mu(ab) = 0 = \mu(a).\mu(b)$

(ت) إذا كان $p^2 \nmid a$ و $p^2 \nmid b$ و p عدد أولي فإن

$a = \prod_{i=1}^{r} p_i \ , b = \prod_{j=1}^{s} q_j$ حيث $p_i \ , q_j$ أعداد أولية مختلفة ، إذاً

$$\mu(ab) = \mu(p_1 p_2 \ldots \ldots p_r . q_1 q_2 \ldots \ldots q_s) = \mu(-1)^{r+s} = \mu(a).\mu(b)$$

ملاحظة:

إذا كان $n \geq 1$ ، فإن

$$\sum_{d \backslash n} \mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ عندما} \\ 0 & n > 1 \text{ عندما} \end{cases}$$

الفصل الثاني : أعداد خاصة

2-1 أعداد فيرما ومرسين

تعريف:

يقال عن عدد F_n أنه عدد فيرما ، إذا كان $F_n = 2^{2^n} + 1$ ، $n \in N$ وإذا كان F_n عدداً أولياً فيسمى F_n عدد فيرما الأولي .

مثال:

$F_0 = 3$ ، $F_1 = 5$ ، $F_2 = 17$ ، $F_3 = 257$ ، $F_4 = 65537$

وعلى الرغم من أن فيرما لم يحسب إلا تلك الأعداد فقد أعتقد أن F_n عدد أولي لكل $n \in N$ لكن أويلر أثبت عدم صحة ذلك بإثباته بأن $F_5 = 4294967297$ يقبل القسمة على 641 ولم يكتشف لحد الأن أي عدد فيرماتي أولي غير F_n، $0 \le n \le 4$

مبرهنة(6):

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2 \quad \text{لكل} \quad n \in Z^+$$

البرهان:

"بالاستقراء على n "

إذا كان $n = 1$ فإن $L.H.S. = F_0 = 3$ ، $R.H.S. = F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

وعليه فإن الطرفين متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$ والآن

لنفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = m$ إذاً

$$\prod_{i=0}^{m-1} F_i = F_m - 2$$

ولكي نثبت صحة العلاقة عندما $n = m + 1$ نلاحظ أن

$$\left(\prod_{i=0}^{m-1} F_i\right).F_m = (F_m - 2)F_m = \left(2^{2^m} - 1\right)\left(2^{2^m} + 1\right)$$

$$= \left(2^{2^{m+1}} - 1\right) = \left(2^{2^{m+1}} + 1 - 2\right) = F_{m+1} - 2$$

إذاً العلاقة صحيحة عندما $n = m + 1$ وعليه فإن العلاقة صحيحة لكل $n \in Z^+$

<u>مبرهنة(7):</u>

$$m \neq n \text{ و } m, n \geq 0 \text{ لكل } (F_m, F_n) = 1$$

<u>البرهان:</u>

يمكن أن نفرض أن $m < n$ إذاً $n = m + r$ وعليه إذا كان $d = (F_m, F_n)$

$x = 2^{2^m}$ فإن

$$\frac{F_n - 2}{F_m} = \frac{F_{m+r} - 2}{F_m} = \frac{x^{2^r} - 1}{x + 1} = 2^{2^r - 1} - 2^{2^r - 2} - \cdots \dots . . - 1$$

وعليه فإن $F_m \backslash (F_n - 2)$ لكن $d \backslash F_m$ إذاً $d \backslash (F_n - 2)$ لكن $d \backslash F_n$ إذاً $d \backslash 2$

وعليه فإن $d = 1$ أو $d = 2$ لكن أعداد فيرما هي أعداد فردية إذاً $d \neq 2$ وعليه

فإن $d = 1$

<u>تعريف:</u>

يقال عن عدد صحيح موجب M_n أنه عدد مرسين إذا كان $M_n = 2^n - 1$

$n \geq 2$ وإذا كان M_n عدداً أولياً فيسمى M_n عدد مرسين الأولي

<u>مثال:</u>

$M_2 = 3$ ، $M_3 = 7$ ، $M_5 = 31$ ، $M_7 = 127$ اعداد أولية ، بينما

$M_4 = 15$ ، $M_6 = 63$ ، $M_{11} = 2047$ ليست أعداد أولية .

ولحد الآن وباستخدام الحاسب الآلي عُرف عدد مرسين الأولي M_n عندما

$$p \in \left\{ \begin{array}{l} 2,3,5,7,17,19,31,61,89,107,127,521,607,1279,2203 \\ 2281,3217,4253,4423,9689,9941,11213,19937,21701 \\ 23209,44497,86243,110503,132049,216091,756839 \\ 859433,1257787,1398269,2976221,3021377,6972593 \\ 13466917,25964951 \end{array} \right\}$$

مبرهنة(8):

إذا كان r\n ، فإن $M_r \backslash M_n$

البرهان: بما أن $n = rs$ إذاً

$$M_n = M_{rs} = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} \dots + 2^r + 1)$$

لكن $M_r = 2^r - 1$ إذاً $M_r \backslash M_n$

نتيجة(2):

إذا كان M_n عدداً أولياً ، فإن n عدد أولي

البرهان:

إذا فرضنا أن n عدد مؤلف إذاً $n = rs$ ، $1 < r, s < n$ وعليه فإن $M_r \backslash M_n$ حسب المبرهنة السابقة إذاً $M_n = tM_r$ لكن $r > 1$ إذاً $M_r > 1$ وبما أن $r < n$ إذاً $M_r < M_n$ ومنه فإن $t > 1$ إذاً M_n عدد غير أولي وهذا خلاف الفرض إذا n عدد أولي .

وقد أورد Lucas Criterion /*المبرهنة* التالية لمعرفة عدد مرسين الأولي.

مبرهنة(9):

إذا كان p عدداً أولياً وعرفنا المتتابعة التالية $L_1, L_2, \dots, L_{p-1}$ بالقاعدة $L_1 = 4$ و $L_k = (L_{k-1}^2 - 2) mod M_p$ لكل $K > 1$ فإن M_p عدد أولي إذا وفقط إذا كان $L_{p-1} = 0$

مثال: أثبت أن $M_7 = 127$ عدد أولي

$$L_1 = 4 \quad ، \quad L_2 = (4^2 - 2) mod 127 = 14$$

$$L_3 = (14^2 - 2) mod 127 = 194 mod 127 = 67$$

$$L_4 = (67^2 - 2) mod 127 = 4487 mod 127 = 42$$

$$L_5 = (42^2 - 2) mod 127 = 1762 mod 127 = 111$$

$$L_6 = (111^2 - 2) mod 127 = 12319 mod 127 = 0$$

إذاً $M_7 = 127$ عدد أولي حسب مبرهنة Lucas

2-2 الأعداد التامة

تعريف:

إذا كانت $\sigma^*(n)$ مجموعة الواسم الفعلية (قواسم العدد باستثنائه) فيقال عن n أنه :

(أ) عدد زائد إذا كان $\sigma^*(n) > n$

(ب) عدد ناقص إذا كان $\sigma^*(n) < n$

وبما أن $\sigma(n) = \sigma^*(n) + n$ إذاً

n عدد زائد $\Leftrightarrow \sigma(n) > 2n$

n عدد ناقص $\Leftrightarrow \sigma(n) < 2n$

مبرهنة(10):

إذا كان $M_p = 2^p - 1$ عدد مرسين أولي فإن

(أ) $M_p . 2^{\boldsymbol{p}}$ عدد زائد ، (ب) $M_p . 2^{\boldsymbol{p-2}}$ عدد ناقص

البرهان:

(أ) ليكن $n = M_p . 2^{\boldsymbol{p}}$ بما أن $(M_p, 2^{\boldsymbol{p}}) = 1$ إذاً

$$\sigma(n) = \sigma(2^p . M_p) = \sigma(2^p) . \sigma(M_p) = (2^{\boldsymbol{p+1}} - 1) . 2^{\boldsymbol{p}}$$

$$\sigma(n) = 2^{2p+1} - 2^p \quad ,2n = 2^{2p+1} - 2^{p+1} \Rightarrow \sigma(n) > 2n$$

وعليه فإن n عدد زائد.

(ب) ليكن $m = M_p . 2^{\boldsymbol{p-2}}$ بما أن $(M_p, 2^{\boldsymbol{p-2}}) = 1$ إذاً

$$\sigma(m) = \sigma(2^{\boldsymbol{p-2}} . M_p) = \sigma(2^{\boldsymbol{p-2}}) . \sigma(M_p) = (2^{p-1} - 1) . 2^{\boldsymbol{p}}$$

$$\sigma(m) = 2^{2p-1} - 2^p \quad ,2m = 2^{2p-1} - 2^{p-1} \Rightarrow \sigma(m) > 2m$$

وعليه فإن m عدد ناقص.

ملاحظة:

(أ) يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الناقصة.

(ب) يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الزائدة.

والآن إلى تعريف الأعداد الكاملة.

تعريف:

يقال عن عدد طبيعي n أنه عدد تام إذا كان $\sigma^*(n) = n$ إذاً

n عدد تام $\Leftrightarrow \sigma(n) = 2n$

والآن إلى قاعدة تحديد الأعداد التامة الزوجية والتي تعود إلى إقليدس

مبرهنة(11):

إذا كان $M_p = 2^p - 1$ عدد مرسين أولي فإن $n = M_p.2^{p-1}$ عدد تام

البرهان:

بما أن $(M_p, 2^{\boldsymbol{p-1}}) = 1$ إذاً

$$\sigma(n) = \sigma\left(2^{p-1}.M_p\right) = \sigma(2^{p-1}).\sigma\left(M_p\right) = (2^{\boldsymbol{p}} - 1).2^{\boldsymbol{p}}$$
$$\sigma(n) = 2^{2p} - 2^p \quad ,2n = 2^{2p} - 2^p \Rightarrow \sigma(n) = 2n$$

وعليه فإن n عدد تام.

واستناداً لتلك القاعدة نجد أن

العدد التام الأول هو 6 لأن $M_2 = 3$ عدد أولي و $2.M_2 = 6$

العدد التام الثاني هو 28 لأن $M_3 = 7$ عدد أولي و $2^2.M_3 = 28$

العدد التام الثالث هو 496 لأن $M_5 = 31$ عدد أولي و $2^4.M_5 = 496$

مبرهنة(12):

كل عدد زوجي تام لابد أن يكون آحاده ستة أو ثمانية

البرهان:

بما أن n عدد زوجي تام إذا $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ و $(2^p - 1)$ عدد مرسين أولي حسب المبرهنة السابقة وعليه وحسب النتيجة(2) فإن p عدد أولي

فإذا كان $p = 2$ فإن $n = 6$ و $6 \equiv 6(mod\ 10)$ وعليه المبرهنة صحيحة

أما إذا كان $p > 2$ فإن p عدد أولي فردي وعليه فإن $p = 4m + 1$ أو $p = 4m + 3$ فإذا كان $p = 4m + 1$ فإن

$$n = 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) = 2.2^{8m} - 2^{4m} = 2.(16)^{2m} - (16)^{m}$$

$$(16)^{r} \equiv 6(mod\ 10)\ \Rightarrow\ n \equiv 2.6 - 6 \equiv 6(mod\ 10)$$

أما إذا كان $p = 4m + 3$ فإن

$$n = 2^{4m+2}(2^{4m+3} - 1) = 2^{8m+5} - 2^{4m+2} = 2(2)^{8m+4} - 4(2)^{4m}$$

$$= 2(2)^{4(2m+1)} - 4(2)^{4m} = 2(16)^{2m+1} - 4(16)^{m}$$

$$n \equiv 2.6 - 4.6 \equiv -12 \equiv 8(mod\ 10)$$

وبالتالي المبرهنة صحيحة لأجل كل عدد تام زوجي

وحتى الآن لم يستطع أحد أن يجيب على السؤال التالي

هل يوجد عدد تام فردي ؟

3-2 الأعداد المتحابة و المتعادلة

تعريف:

يقال عن عددين n,m أنهما متحابان إذا كان

$$\sigma^*(n) = m \text{ و } \sigma^*(m) = n$$

إذاً m,n متحابان $\Leftrightarrow \sigma(m) = \sigma(n) = m + n$

مثال:

$284,220$ متحابان ، لأن $504 = 220 + 284$ و

$$\sigma(220) = \sigma(2^2.5.11) = \frac{2^3-1}{2-1}.\frac{5^2-1}{5-1}.\frac{11^2-1}{11-1} = 504$$

$$\sigma(284) = \sigma(2^2.71) = \frac{2^3-1}{2-1}.72 = 7.72 = 504$$

ملاحظة:

إذا كان $\sigma(n) = \sigma(m)$ فذلك ليس شرطاً كافياً ليكون n,m متحابان وللتوضيح

ليكن $m = 6$ و $n = 11$ إذاً $\sigma(n) = \sigma(m) = 12$ لكن $11,6$ غير متحابين

لأن $n = 11 \neq 6 = \sigma^*(m)$ وعليه فإن الشرط $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$

ضروري.

تعريف:

يقال عن عددين n,m أنهما متعادلان إذا كان

$$\sigma^*(n) = \sigma^*(m)$$

إذاً m,n متحابان $\Leftrightarrow \sigma(m) + n = \sigma(n) + m$

وإذا كان معنا عدد مفروض وأردنا أن نعلم الأعداد التي مجموع أجزاء كل واحد منها مثل هذا العدد المفروض أنقصنا من العدد المفروض واحداً ثم جزأنا الباقي بعددين

أوليين وقسمنا أيضاً بعددين آخرين أوليين وهكذا ثم نضرب القسمين في التقسيم الأول أحدهما في الآخر ونضرب القسمين فب التقسيم الثاني أحدهما في الآخر وكذلك نفعل بقسمي التقسيم الثالث والرابع و .....

أي أن:

إذا كان a عدداً طبيعياً معلوماً وكان المطلوب إيجاد جميع الأعداد المتعادلة المرتبطة بالعدد a يعبر عن a بالشكل الآتي

$a = 1 + p_i + q_i$ حيث p_i, q_i أعداد أولية مختلفة لكل $i \in N$ فنجد أن $\{p_i, q_i\}$ أعداد مختلفة مجموع أجزائها متساوي

مثال:

إذا كان $a = 57$ فإن $a - 1 = 56$ و $56 = 3 + 53$ ، $56 = 13 + 43$ و $3,13,43,53$ أعداد أولية مختلفة ، وعليه فإن $m = 3.53 = 159$ $n = 13.43 = 559$ عددان متعادلان، لأن $\sigma^*(n) = \sigma^*(m) = 57$

المراجع

1- فالح بن عمران الدوسري : نظرية المجموعات : مطابع الصفا ، الطبعة الثانية 2001م ، توزيع : دار السعودية للنشر والتوزيع

2- رشدي راشد : " تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب " . مركز دراسات الوحدة العربية بيروت 1989م.

3- D.M.Burton, “Elementary Number Theory” Allyn and Bacon Co.(1980)

4- H. S. Rose, “A Course in Number Theory” Oxford Science Publications (1988) .

5- J. P. Serre, “A Course in Arithmetic” Springer International student Edition (1973).